

Rozptyl

Z předchozí kapitoly umíme spočítat pohyb částice v poli centrální síly. Nyní toho využijeme pro případ lehké částice (například částice alfa, tedy jádra hélia) nalétající na těžké centrum (například jádro zlata), které částici odpuzuje. Právě tohle se totiž děje ve slavném Rutherfordově experimentu, který poprvé prokázal existenci atomového jádra. Rutherford ovšem asi těžko mohl vypustit jedinou alfa částici z přesného místa a sledovat celou její trajektorii. Jak vlastně výsledky tohoto pokusu pozoroval a jak je porovnal s tím, co předpovídá teorie?

Pohyb částic nalétajících na odpuzující silové centrum

Částice s nábojem q a hmotností μ se pohybuje v blízkosti silového centra s nábojem Q , viz obrázek vpravo². Pro jednoduchost budeme silové centrum považovat za nehybné³. Potenciální energii částice v poli silového centra jsme si již uvedli v předchozí kapitole, viz (5.13):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}. \quad (6.1)$$

Binetův vzorec (5.27) v tomto případě konkrétně je $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ\mu}{l^2}$ a jeho

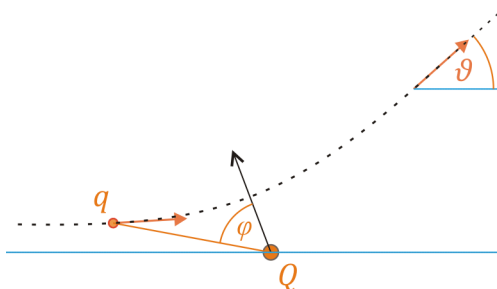
řešení $\frac{1}{r} = u = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ\mu}{l^2} + A \cos\varphi$. (Blíže viz kap. 5.) Označíme-li

$$p = \frac{4\pi\epsilon_0}{qQ} \frac{l^2}{\mu}, \quad \epsilon = Ap, \quad (6.2)$$

dostaneme výsledný vzorec pro trajektorii⁴:

$$r = \frac{p}{\epsilon \cos\varphi - 1}. \quad (6.3)$$

Pro další úvahy bude výhodné obrázek výše otočit tak, aby částice nalétala zleva:



Úhel ϑ je úhel mezi směrem, kterým částice letěla původně, a směrem, do něhož odlétá, když už je hodně daleko. Právě tento úhel hraje v Rutherfordově pokusu důležitou roli.

¹ Uvažujeme zde redukovanou hmotnost částice, stejně jako v předchozí kapitole.

² Omezujeme se zde na případ $Qq > 0$, tedy na případ, kdy silové centrum částici odpuzuje.

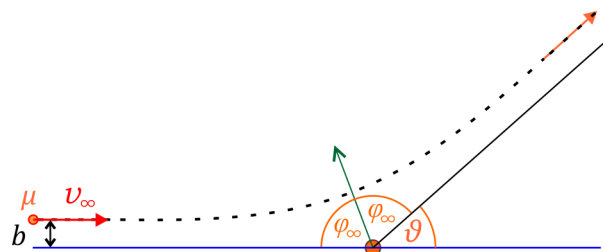
³ Ve skutečnosti částice silové centrum také ovlivní; i jádra zlata nalétající alfa částice nějakou hybnost předá. Kdybychom celý problém chtěli řešit přesně, museli bychom výsledky, které zde dostaneme, přepočítat na polohy a rychlosti alfa částice a jádra zlata podle vztahů (5.3) a (5.4) z předchozí kapitoly. Výsledné vzorce by byly jen trochu komplikovanější. Princip pokusu však asi lépe uvidíme, pokud budeme jádro zlata považovat za nehybné – a protože je toto jádro skoro padesátkrát hmotnější než alfa částice, je to rozumná aproximace.

⁴ Srovnajte vztah (5.33) z předchozí kapitoly pro případ přitažlivé síly.

Rutherfordův vzorec

Pojďme spočítat, jak úhel \mathcal{G} závisí na parametrech nalétající částice. Budeme přitom uvažovat parametry ve velké vzdálenosti, teoreticky v nekonečnu⁵. Parametry nalétající částice budou:

- redukovaná hmotnost μ ,
- rychlost nalétající částice (protože je „v nekonečnu“, označíme ji v_∞)
a
- tzv. *srážkový parametr* b , což je vzdálenost částice od přímky rovnoběžné s její rychlostí, která prochází silovým centrem⁶ – viz obrázek.



Ze vztahu (6.3) je $\varepsilon \cos \varphi - 1 = p/r$. Odtud pro $r \rightarrow \infty$ plyne $\varepsilon \cos \varphi_\infty - 1 = 0$, čili

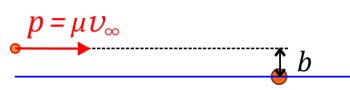
$$\varepsilon = \frac{1}{\cos \varphi_\infty} . \quad (6.4)$$

Jako φ_∞ jsme přitom označili úhel mezi směrem k bodu, kde je částice silovému centru nejbližší, a směrem k částici ve velmi velké vzdálenosti (prakticky v nekonečnu), viz obrázek výše. Z obrázku je také vidět, že $2\varphi_\infty + \mathcal{G} = \pi$, takže platí

$$\varphi_\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\mathcal{G}}{2} . \quad (6.5)$$

Pro odvození Rutherfordova vzorce budeme potřebovat ještě vztah (5.21) (pro $\sin \theta = 1$), tedy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} . \quad (6.6)$$

Zde (a také ve vztahu (6.2)) představuje konstanta l moment hybnosti nalétající částice vzhledem k silovému centru. Ten lze z parametrů nalétající částice lehce určit. Podobně, jako ve středoškolské fyzice počítáme moment síly jako síla krát rameno síly, můžeme moment hybnosti určit jako hybnost krát „rameno hybnosti“, viz  obrázek⁷. Je tedy

$$l = b \mu v_\infty . \quad (6.7)$$

Ted' už máme pohromadě vše, co potřebujeme k odvození Rutherfordova vzorce. Ze vztahu (6.3), čili

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos \varphi - 1} ,$$

⁵ K výraznějšímu odpuzování alfa částice od jádra dochází zřejmě ve vzdálenostech srovnatelných s rozměry atomu (nebo spíše ještě podstatně menších), tedy na rozměrech $< 10^{-10}$ m. V porovnání s těmito rozměry jsou zdroj alfa částic i detektor nebo stínítko, na němž detekujeme odlétající částice, „prakticky v nekonečnu“.

⁶ Kdyby se částice od silového centra neodpuzovala, byla by b nejmenší vzdálenost, ve které by částice minula centrum. Pro $b = 0$ by se částice trefila přesně do silového centra.

⁷ Formální odvození (α je úhel mezi \vec{r} a \vec{p}): $l = |\vec{l}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r p \sin \alpha = (r \sin \alpha) p = b p$.

vypočteme derivaci podle času radiální rychlost⁸ a při její úpravě postupně využijeme vztahy (6.3) a (6.6):

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\varepsilon \cos \varphi - 1} \right) = \frac{p \varepsilon \sin \varphi}{(\varepsilon \cos \varphi - 1)^2} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p \varepsilon \sin \varphi}{(\varepsilon \cos \varphi - 1)^2} \frac{l}{\mu r^2} = \\ &= \frac{p \varepsilon \sin \varphi}{(\varepsilon \cos \varphi - 1)^2} \frac{l}{\mu} \left(\frac{\varepsilon \cos \varphi - 1}{p} \right)^2 = \frac{l}{\mu p} \varepsilon \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.8)$$

Pro velmi vzdálenou částici, tedy pro $r \rightarrow \infty$ dostaneme z (6.8) po dosazení (6.4) rychlost nalétající částice⁹

$$v_\infty = |v_r| = \frac{l}{\mu p} \varepsilon \sin \varphi_\infty = \frac{l}{\mu p} \frac{\sin \varphi_\infty}{\cos \varphi_\infty} = \frac{l}{\mu p} \operatorname{tg} \varphi_\infty.$$

Od úhlu φ_∞ přejdeme pomocí (6.5) k $\vartheta/2$:

$$v_\infty = \frac{l}{\mu p} \operatorname{tg} \varphi_\infty = \frac{l}{\mu p} \operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2}.$$

Vyjádríme odtud $\operatorname{cotg}(\vartheta/2)$, dosadíme za p z(6.2) a za l pak z (6.7):

$$\operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2} = v_\infty \frac{\mu}{l} p = v_\infty \frac{\mu}{l} \frac{4\pi\varepsilon_0}{qQ} \frac{l^2}{\mu} = v_\infty \frac{4\pi\varepsilon_0}{qQ} l = v_\infty \frac{4\pi\varepsilon_0}{qQ} b \mu v_\infty.$$

Toto již dává výsledný **Rutherfordův vzorec**:

$$\operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{qQ} \mu b v_\infty^2 \quad (6.9)$$

Tento vzorec popisuje, jak úhel ϑ , o nějž se částice odchýlí od původního směru, závisí na nábojích částice i silového centra, na hmotnosti částice, rychlosti, s jakou nalétá, a na srážkovém parametru b , který určuje, „jak přesně částice míří do centra“¹⁰.

Rutherfordův vzorec se často také zapisuje konkrétně pro případ alfa částice (s nábojem $q = 2e$, kde e je elementární náboj) a „terčového jádra“ s nábojem $Q = Ze$, kde Z je atomové číslo jádra zlata:

$$\operatorname{cotg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{Ze^2} \mu b v_\infty^2 \quad (6.10)$$

⁸ Tj. průmět rychlosti do směru polohového vektoru \vec{r} .

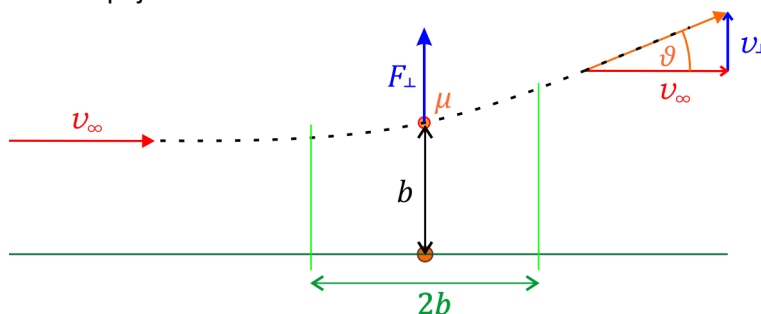
⁹ Pro nalétající částici je $v_r < 0$, což z (6.8) vyjde, když je $l < 0$. (Viz kapitolu 5: l je složka momentu hybnosti do směru osy z .) V dalších odvozeních už budeme pracovat jen s velikostmi rychlostí a dalších veličin, takže již budeme brát l jako velikost momentu hybnosti, $l = |l|$, aniž bychom psali absolutní hodnotu.

¹⁰ Kvalitativně si můžeme zkontrolovat, že úhel závisí na parametrech „rozumně“: Pro větší náboje centrum částice více odpuzuje, takže úhel rozptylu by logicky měl být větší. Vzorec (6.9) toto skutečně dává: náboji dělíme, takže pro větší qQ vyjde $\operatorname{cotg}(\vartheta/2)$ menší, úhel ϑ tedy větší. Naopak těžší nalétající částice nebo částice nalétající vyšší rychlostí se zřejmě odchýlí méně, vztah (6.9) tomu odpovídá; podobně pro závislost na b .

Nešlo by to jednodušeji? (Alespoň přibližně.)

Rutherfordův pokus hrál důležitou roli ve vývoji modelů atomu. Je proto rozumné zmínit ho už na úrovni střední školy. Přitom může být zajímavé uvést a diskutovat i Rutherfordův vzorec¹¹. Ovšem jeho výše uvedené odvození je „několik pater“ nad středoškolskou úrovní. Přitom výsledný Rutherfordův vzorec není vlastně nijak složitý. Nešlo by ho nějak, alespoň přibližně, odvodit jednodušeji, způsobem dostupným i středoškolákům se zájmem o fyziku?

Kupodivu lze závislost úhlu ϑ na parametrech nalétající částice určit i jednoduše – ale jen v případě, že odchylka ϑ je malá. Půjde o dosti hrubé odvození, ale jistou představu o situaci nám dá. Obrázek naznačuje, jak na odvození půjdeme.



Síla, kterou silové centrum odpuzuje částici, když je mu nejbližší, určíme z Coulombova zákona jako

$$F_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{b^2}.$$

Tato síla působí prakticky kolmo k původní rychlosti částice, což jsme už vyznačili symbolem \perp . Zrychlení v tomto kolmém směru tedy je

$$a_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{\mu} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{b^2\mu}.$$

Řekněme, že zhruba takto velké zrychlení v daném směru má částice celou dobu, kdy se nachází v oblasti vyznačené na obrázku zelenými čarami, mimo tuto oblast zrychlení zanedbáme¹². Částice tuto oblast délky $2b$ prolétá rychlostí v_{∞} ¹³, takže jí to zabere čas $t = 2b/v_{\infty}$. Ve směru kolmém na původní rychlost tedy částice získá rychlost

$$v_{\perp} \doteq a_{\perp} t \doteq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{b^2\mu} \frac{2b}{v_{\infty}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \frac{qQ}{b\mu v_{\infty}}.$$

Z obrázku je vidět, že $\operatorname{tg} \vartheta = v_{\perp}/v_{\infty}$. Pro malé úhly, $|\vartheta| \ll 1$, je ale $\operatorname{tg} \vartheta \doteq \vartheta$, takže můžeme psát

$$\frac{\vartheta}{2} \doteq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{2} \frac{v_{\perp}}{v_{\infty}} \doteq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{b\mu v_{\infty}^2}. \quad (6.11)$$

Protože pro malé úhly je $\operatorname{cotg}(\vartheta/2) \doteq 2/\vartheta$, vyjde v tomto případě z Rutherfordova vzorce (6.9)

¹¹ Asi ne v běžné výuce, ale v nějakém speciálním semináři.

¹² To jsou hodně hrubé předpoklady! Ve skutečnosti zrychlení míří v různých bodech různým směrem, vzdálenost částice od centra je větší než b (a v různých místech různá), síla na částici samozřejmě působí i mimo vyznačenou oblast... Ale alespoň řádový odhad velikosti efektu daného odpuzováním takto dostaneme.

¹³ To, že rychlost „ve vodorovném směru“ považujeme za konstantní, je další přiblížení.

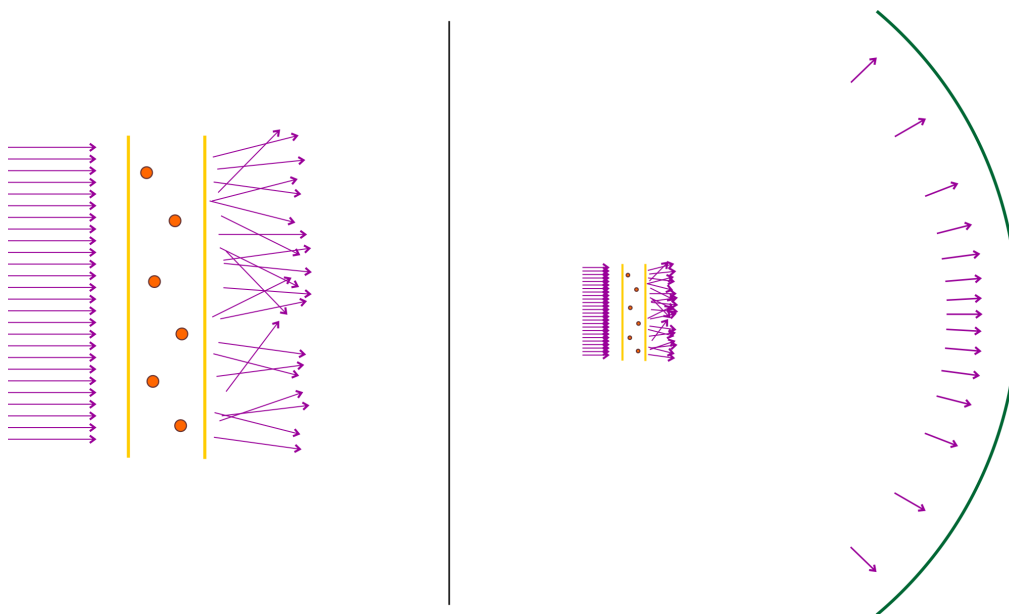
$$\frac{2}{\vartheta} \doteq \cotg\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{4\pi\epsilon_0 b\mu v_\infty^2}{qQ} \Rightarrow \frac{\vartheta}{2} \doteq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{b\mu v_\infty^2},$$

tedy vztah totožný s (6.11). Takže jsme výše uvedenou přibližnou úvahou dostali – alespoň pro malé úhly rozptylu – stejné chování rozptylovaných částic, jaké popisuje Rutherfordův vzorec.¹⁴

Účinný průřez

Jak ve skutečnosti probíhal Rutherfordův experiment? Rozhodně ne tak, že by jedna alfa částice nalétala na jedno jádro zlata! Ve skutečnosti svazek alfa částic dopadal na velmi tenkou zlatou fólii, tak tenkou, že každá alfa částice interagovala prakticky jen s jediným jádrem zlata¹⁵. Částice se odchylovaly¹⁶ do různých směrů – a na stínítku, na něž dopadaly, bylo vidět, do jakých směrů se rozptýlily. Rutherford ovšem jistě nemohl ovlivňovat ani měřit srážkový parametr b u jednotlivých částic. Výsledkem experimentu bylo prostě zjištění, kolik částic odlétá do kterých směrů.

Situaci ve zjednodušené podobě ukazuje následující obrázek¹⁷. Na fólii dopadá z jednoho směru svazek částic, každá částice se odchýlí po interakci s některým z atomů, za fólií jsou částice rozptýleny do různých směrů. Od fólie částice letí na dostatečně vzdálené stínítko, jak to ukazuje pravá část obrázku. Podle směru, kterým částice letí, dopadne na určité místo stínítka. Na stínítku vyvolá záblesk. Polohy těchto záblesků Rutherfordův asistent zaznamenával a z nich určovali, do kterých směrů letí kolik částic.



¹⁴ Prosím, neprezentujte toto nikde jako rovnocennou náhradu přesného odvození Rutherfordova vzorce. Použili jsme zde velmi hrubá přiblížení – a to, že nám nakonec vyšel vzorec dobře i co se všech konstant týče, je spíše náhoda. Kdybychom délku oblasti, kde jsme uvažovali působení síly, vzali nikoli $2b$, ale jen b , vyšel by nám výsledek s chybou 50%! Takže co se koeficientu týče, vlastně jsme odvození spíše „nafitovali“, abychom dostali přesnou shodu s Rutherfordovým vzorcem. Podstatné ovšem je, že závislost na parametrech q , Q , μ , v_∞ a b jsme i v našem zjednodušeném přístupu dostali správně. (I když jsme ji odvodili jen pro malé úhly rozptylu.)

¹⁵ Samozřejmě, některé alfa částice jistě prolétaly někde „napůl“ mezi dvěma atomy, ale tyto částice se odchýlily tak nepatrně, že je nemusíme brát v úvahu.

¹⁶ V souladu s názvem kapitoly a s používanou terminologií může říci, že se *rozptylovaly* do různých směrů.

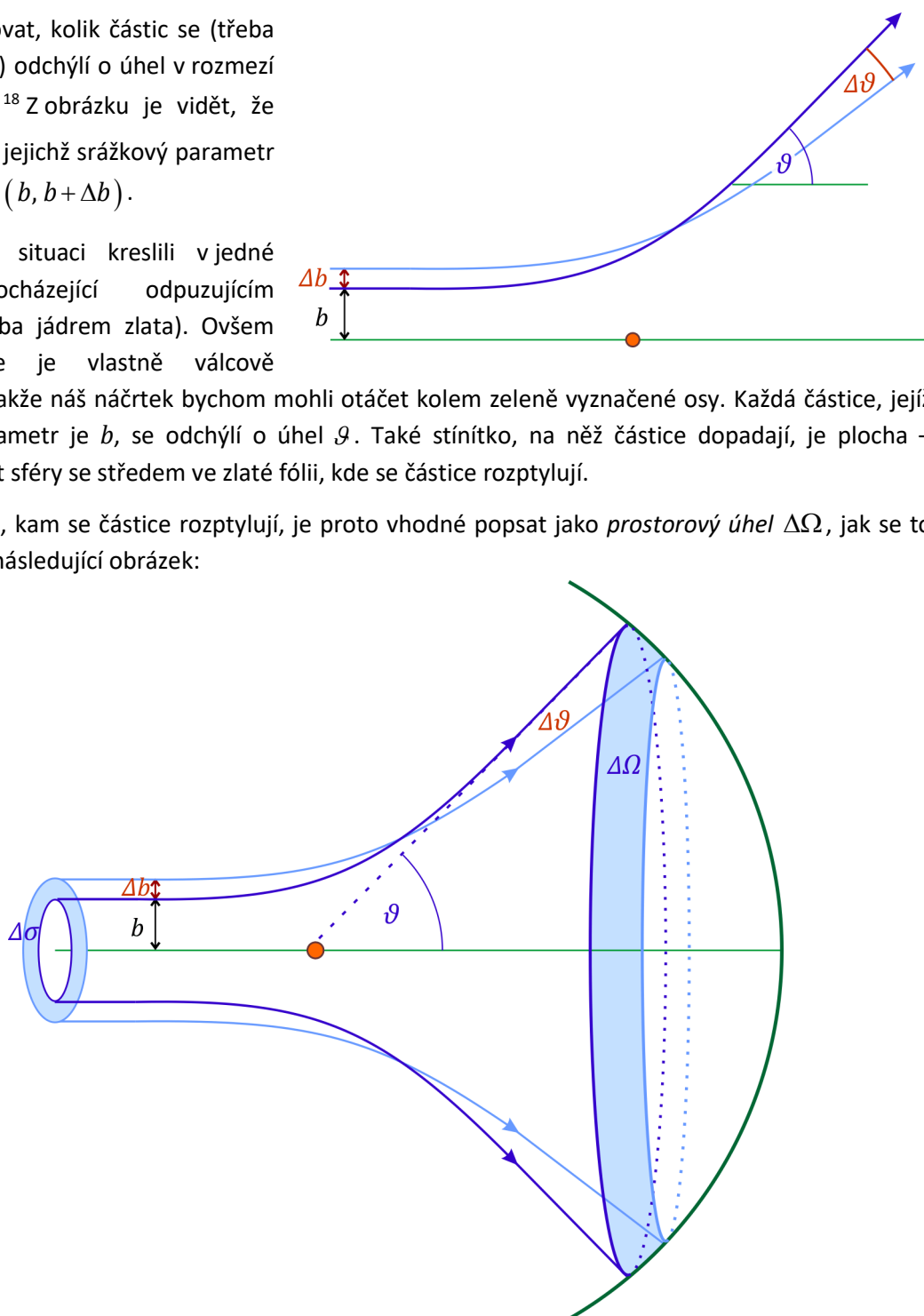
¹⁷ Obrázek je opravdu hodně zjednodušený. Zlato se dá vytepat do hodně tenké fólie (právě proto ho Rutherford používal jako materiál pro terčík, na němž se alfa částice rozptylovaly), ale ani ten nejlepší zlatník na světě by nedokázal vytepat vrstvičku tenkou jen dva průměry atomů zlata. Také rozměry atomových jader jsou na obrázku o mnoho řádů přehnané.

Co předpovídá teorie o tom, kolik částic odlétá do kterých směrů? Každá nalétající částice interaguje prakticky jen s jedním jádrem zlata, proto stačí uvažovat svazek částic nalétající na jediné centrum.

Budeme určovat, kolik částic se (třeba za 1 sekundu) odchýlí o úhel v rozmezí $(\vartheta, \vartheta + \Delta\vartheta)$.¹⁸ Z obrázku je vidět, že jde o částice, jejichž srážkový parametr byl v rozmezí $(b, b + \Delta b)$.

Dosud jsme situaci kreslili v jedné rovině procházející odpuzujícím centrem (třeba jádrem zlata). Ovšem celá situace je vlastně válcově symetrická, takže náš náčrtek bychom mohli otáčet kolem zeleně vyznačené osy. Každá částice, jejíž srážkový parametr je b , se odchýlí o úhel ϑ . Také stínítko, na něž částice dopadají, je plocha – například část sféry se středem ve zlaté fólii, kde se částice rozptylují.

Rozmezí úhlů, kam se částice rozptylují, je proto vhodné popsat jako *prostorový úhel* $\Delta\Omega$, jak se to snaží ukázat následující obrázek:



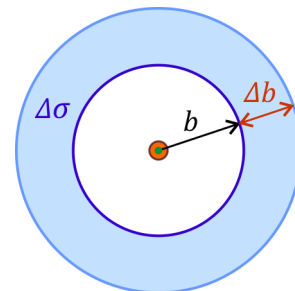
¹⁸ Uvědomte si, že nemůžeme počítat částice, které se odchýlí o zcela přesný úhel, například přesně 45° , ani o milióntinu stupně víc ani méně. Úhlů, do nichž se mohou částice odchýlovat, je nekonečný počet, takže je prakticky jisté, že když si vybereme například 45° , žádná částice se *přesně* o tento úhel neodchýlí. Navíc, polohy bodů, v nichž částice dopadnou na stínítko, také nemůžeme měřit nekonečně přesně. Vždy proto musíme pracovat s určitým rozmezím úhlů.

Představíme-li si stínítko jako sféru o jednotkovém poloměru, je poloměr „pásku“ vyznačeného na sféře roven $\sin \vartheta$; délka tohoto pásku je tedy $2\pi \sin \vartheta$. Šířka pásku je $\Delta \vartheta$. Plocha tohoto pásku je tedy $2\pi \sin \vartheta \Delta \vartheta$. Ovšem plocha na jednotkové sféře – to je právě velikost prostorového úhlu $\Delta \Omega$. Je tedy¹⁹

$$\Delta \Omega = 2\pi \sin \vartheta \Delta \vartheta . \quad (6.12)$$

Do tohoto prostorového úhlu poletí všechny částice, jejichž srážkový parametr byl v rozmezí $(b, b + \Delta b)$. Z pohledu ze směru nalétajících částic (na předchozích obrázcích tedy „zleva“, ve směru osy vyznačené zeleně) všechny tyto částice proletí mezikružím ohraničeným poloměry b a $b + \Delta b$, viz obrázek. Pro $|\Delta b| \ll b$ je plocha tohoto mezikruží přibližně²⁰

$$\Delta \sigma \doteq 2\pi b \Delta b . \quad (6.13)$$



Proč se vlastně zajímáme o plochu mezikruží? Protože právě na této ploše závisí, jak mnoho částic se rozptýlí do výsledného prostorového úhlu $\Delta \Omega$!

Částice nalétají s nějakou hustotou, řekněme, že za 1 sekundu jich plochou 1 m^2 projde n . Pak plochou $\Delta \sigma$ projde za sekundu $n \Delta \sigma$ částic – a právě všechny tyhle se rozptýlí do úhlu $\Delta \Omega$! Větší $\Delta \sigma$ znamená větší počet částic, na stínítku v daném prostorovém úhlu.

Veličina, k níž jsme dospěli, $\Delta \sigma$, je při popisu rozptylu klíčová. Nazývá se **diferenciální účinný průřez**.²¹

Účinný průřez pro Rutherfordův rozptyl

Spočítat diferenciální účinný průřez pro Rutherfordův rozptyl je teď už jen přímočará matematika. Ze vztahu (6.10) vypočteme b :

$$b = \frac{Z e^2}{2\pi \epsilon_0 \mu v_\infty^2} \cotg \frac{\vartheta}{2} . \quad (6.14)$$

Změna b při změně ϑ je

$$\Delta b \doteq \frac{db}{d\vartheta} \Delta \vartheta = \frac{Z e^2}{2\pi \epsilon_0 \mu v_\infty^2} \left(-\frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} \frac{1}{2} \right) \Delta \vartheta .^{22} \quad (6.15)$$

Účinný průřez je (viz (6.13) a (6.12)):

¹⁹ Naše úvahy samozřejmě platí jen pro $|\Delta \vartheta| \ll 1$, resp. zcela přesně v limitě $\Delta \vartheta \rightarrow 0$. Místo s konečnými přírůstky $\Delta \vartheta$, $\Delta \Omega$, Δb se proto často pracuje s diferenciály $d\vartheta$, $d\Omega$, db .

²⁰ Platí $\Delta \sigma = \pi(b + \Delta b)^2 - \pi b^2 = \pi(b^2 + 2b\Delta b + (\Delta b)^2 - b^2) = \pi b \Delta b (2 + (\Delta b/b)) \doteq 2\pi b \Delta b$.

Rychlejší odvození: Pro velmi úzký „pásek“ ($\Delta b \ll b$) je plocha prakticky stejná, jestli je „zatočený“ nebo natažený jako obdélník. Délka pásku je $2\pi b$, šířka Δb . Odtud už je velikost plochy $2\pi b \Delta b$.

²¹ Fakticky se pod tímto názvem často chápe poměr $\Delta \sigma / \Delta \Omega$. Zajímá-li nás totiž hustota částic dopadajících na stínítko (tj. počet částic za sekundu na steradián), musíme počet částic za sekundu, $n \Delta \sigma$, dělit prostorovým úhlem $\Delta \Omega$, tedy uvažovat veličinu $n \Delta \sigma / \Delta \Omega$.

²² Záporné znaménko je dáno tím, že pro větší úhel ϑ je b menší. Dále nám půjde o velikost plochy a prostorového úhlu, takže budeme pracovat s absolutními hodnotami.

$$\Delta\sigma = 2\pi b|\Delta b| = \frac{2\pi}{2} \left(\frac{Z e^2}{2\pi\epsilon_0 \mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)} \Delta\vartheta = \frac{2\pi}{2} \left(\frac{Z e^2}{2\pi\epsilon_0 \mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2)} \frac{\Delta\Omega}{2\pi \sin\vartheta} .$$

Dosadíme-li sem $\sin\vartheta = 2 \sin(\vartheta/2) \cos(\vartheta/2)$, dostaneme po úpravě

$$\Delta\sigma = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu^2 v_\infty^4} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \Delta\Omega \quad (6.16)$$

Toto je **diferenciální účinný průřez pro Rutherfordův rozptyl**.²³

Vidíme, že tento účinný průřez velmi výrazně závisí na úhlu ϑ . Pro $\vartheta \rightarrow 0$ dokonce diverguje.²⁴ Co je ale důležité: Účinný průřez je nenulový i pro velké úhly, dokonce i pro úhly blízké $\vartheta = \pi$. To znamená, že některé alfa částice se od jader zlata odrazí směrem dozadu!

Právě tyto dozadu letící alfa částice byly v Rutherfordově pokusu dokladem toho, že v atomu existuje malé kladně nabitě jádro, v němž je soustředěna většina hmotnosti atomu²⁵. Podstatné bylo, že závislost účinného průřezu na úhlu ϑ bylo možno měřit a porovnat s teoretickou předpovědí (6.16). Nešlo tedy jen o kvalitativní pozorování typu „někdy se alfa částice odrazí dozadu“. Právě shoda teoretického a naměřeného průběhu byla silným argumentem ve prospěch nového (Rutherfordova) modelu atomu.

Poznámka k jednotkám (aneb o průřezu velkém jako stodola)

Účinný průřez je plocha, takže ho můžeme měřit v m^2 . To však hodně velká jednotka. Jaderní a částicovní fyzikové tradičně používají výrazně menší jednotku zvanou **barn**. Platí

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 .$$

Zajímavé je, že název barn opravdu pochází z anglického výrazu pro stodolu²⁶.

Než se s rozptylem rozloučíme, podívejme se ještě na jeden jednoduchý příklad – případ, kdy nepotřebujeme nic počítat podle Binetova vzorce, ale vystačíme s jednoduchým pravidlem „úhel odrazu = úhlu dopadu“.

²³ Často se také píše pomocí diferenciálů: $d\sigma = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu^2 v_\infty^4} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} d\Omega$.

²⁴ Není divu, částice, které nalétávají daleko od terčíkového jádra – a takových je mnoho – se odchylují jen o velmi malé úhly.

²⁵ Podle předchozího Thomsonova „pudingového“ modelu měl být kladný náboj rozprostřen v celém objemu atomu. Takovýmto útvarem by ale alfa částice prolétla, aniž by se výrazněji odchýlila, rozhodně tam nebylo nic, co by ji mohlo odrazit směrem dozadu.

²⁶ Jeden barn je tedy „průřez velký jako stodola“. Na první pohled se nezdá, že by plocha o 28 řádů menší než metr čtvereční byla velká jako stodola. Je ale nutno si uvědomit, že $10^{-28} \text{ m}^2 = (10^{-14} \text{ m})^2 = (10 \text{ fm})^2$. Jde tedy o plochu desetkrát deset femtometrů – a právě femtometr je adekvátní jednotkou pro rozměry atomových jader. Například oproti rozměrům alfa částice samotné je opravdu barn „velký jako stodola“.

Rozptyl na tuhé kouli

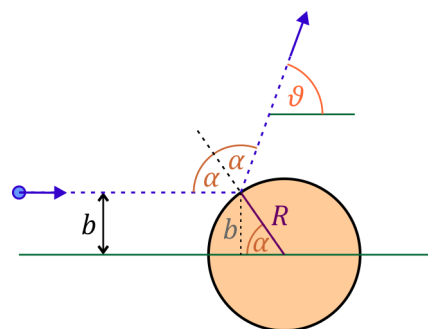
Uvažujme částici (malou tuhou kuličku), která se ideálně pružně odrazí od koule poloměru R , viz obrázek.

Z obrázku je vidět, že

$$b = R \sin \alpha \quad (6.17)$$

a také

$$2\alpha + \vartheta = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}.$$



Dosazením do (6.17) dostáváme

$$b = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \right) = R \cos \frac{\vartheta}{2},$$

a dále

$$|\Delta b| = \left| \frac{db}{d\vartheta} \Delta\vartheta \right| = R \left| \frac{d}{d\vartheta} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \right) \right| \Delta\vartheta = \frac{R}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \Delta\vartheta.$$

Odtud už přímo

$$\Delta\sigma = 2\pi b |\Delta b| = \pi R^2 \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \Delta\vartheta = \frac{\pi}{2} R^2 \sin \vartheta \Delta\vartheta. \quad (6.18)$$

A protože (viz (6.12))

$$\Delta\vartheta = \frac{\Delta\Omega}{2\pi \sin \vartheta},$$

je výsledný **diferenciální účinný průřez pro rozptyl na tuhé kouli**:

$$\Delta\sigma = \frac{R^2}{4} \Delta\Omega \quad (6.19)$$

Vidíme, že tento účinný průřez je konstantní, nezávisí na úhlu ϑ . To znamená, že pokud bude na tuhou kouli dopadat rovnoběžný svazek částic, bude se jich odrážet do všech směrů stejný počet.

Na tomto příkladě můžeme ilustrovat ještě jednu užívanou veličinu. Můžeme totiž sečíst (přesněji řečeno integrovat) diferenciální účinné průřezy do všech směrů. Dostaneme tak celkový neboli **totální účinný průřez**. V našem případě, kdy je diferenciální účinný průřez konstantní, je tato integrace triviální – jedná se vlastně jen o vynásobení plným prostorovým úhlem (tedy 4π steradiánů):

$$\sigma = \int_{\text{všechny směry}} \frac{R^2}{4} d\Omega = \frac{R^2}{4} 4\pi = \pi R^2. \quad (6.20)$$

Tento totální účinný průřez má přitom velmi přirozenou interpretaci: πR^2 je plocha příčného řezu koulí, tedy průřezu, který „vidí“ částice nalétající na kouli. Pouze částice, které prolétnou kruhem o poloměru R , narazí do koule a odrazí se od ní (do různých směrů); ostatní částice prolétnou kolem, aniž by s koulí interagovaly.²⁷

²⁷ Totální účinný průřez tedy vypovídá o tom, „jak moc“ koule s částicemi v nalétajícím svazku celkově interaguje: větší koule odrazí víc částic, než malá.