

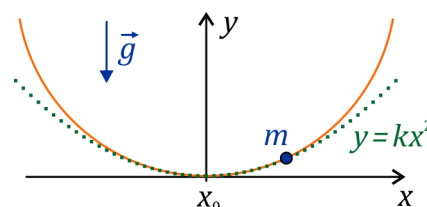
Malé kmity soustav hmotných bodů

Nyní se budeme věnovat chování soustavy hmotných bodů v okolí rovnovážné polohy. Toto chování lze totiž často spočítat jednodušeji než v obecném případě. Příkladem je pohyb našeho oblíbeného matematického kyvadla: Dobu kmitu pro malé výchylky určíme snadno ze známého vztahu $2\pi\sqrt{g/l}$, určit ji pro velké výchylky je mnohem obtížnější.

Potenciální energie v okolí rovnovážné polohy

Podívejme se nejprve na jednoduchý jednorozměrný případ. Uvažujme hmotný bod, jehož pohyb je vázán na křivku, třeba právě na kružnici, jako v případě matematického kyvadla. Rovnovážná poloha je v nejnižším bodě křivky, tedy v $x = x_0$.

V okolí rovnovážné polohy můžeme tvar křivky aproximovat parabolou (na obrázku je vyznačena tmavozelenými body). Potenciální energie bodu v homogenním gravitačním poli je tedy přibližně¹ $V \doteq mgy = mgk(x - x_0)^2$. Kvadratické závislosti V odpovídá síla přímo úměrná výchylce² – to znamená, že v naší aproximaci se hmotný bod pohybuje stejně jako závaží na pružině.³ Frekvenci, resp. periodu kmitů lze tedy už snadno spočítat.



Stejně budeme postupovat v případě soustavy hmotných bodů. Potenciální energii v okolí rovnovážné polohy budeme aproximovat členy, které budou druhými mocninami výchylek.

Protože budeme uvažovat soustavu hmotných bodů s vazbami, bude vhodné pracovat v zobecněných souřadnicích q_j , $j = 1, \dots, r$, viz kap. 2.⁴ Souřadnice odpovídající rovnovážné poloze budeme značit $q_j^{(0)}$, výchylky z rovnovážné polohy pak $q_j - q_j^{(0)} = \eta_j$.⁵ Potenciální energii v okolí rovnovážné polohy budeme aproximovat Taylorovým rozvojem⁶

$$V(q_j) = V(q_j^{(0)}) + \sum_{j=1}^r \left. \frac{\partial V}{\partial q_j} \right|_{q_j^{(0)}} \eta_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right|_{q_j^{(0)}} \eta_j \eta_k + O(\eta_j^3) \quad (4.1)$$

Členy třetího a vyššího řádu, označené ve (4.1) symbolem O , budeme zanedbávat.⁷

Člen $V(q_j^{(0)})$ je konstanta. Ovšem potenciální energie je definována až na konstantu, a navíc libovolná aditivní konstanta v lagrangiánu nezmění Lagrangeovy rovnice. To znamená, že tento člen můžeme vypustit.

¹ Z obrázku je vidět, že pro větší výchylky se skutečná potenciální energie od naší aproximace liší (oranžová křivka je výš, než zelené body). Pro malé výchylky však parabola aproximuje skutečnou křivku velmi dobře.

² $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \approx -2mgk(x - x_0)$

³ Navíc je zde podstatné, že pohyb se při malých výchylkách děje prakticky jen ve směru osy x .

⁴ r je počet stupňů volnosti dané soustavy hmotných bodů.

⁵ Výchylky z rovnovážné polohy, tedy η_j , pak vezmeme jako nové souřadnice místo souřadnic q_j , abychom nemuseli pořád vypisovat $q_j - q_j^{(0)}$.

⁶ Připomeňme, že zápis $V(q_j)$ zde symbolizuje $V(q_1, q_2, \dots, q_r)$.

⁷ S výjimkou „patologických“ případů budou tyto členy pro malé výchylky zanedbatelně malé oproti členům, které v (4.1) ponecháme.

Co členy prvního řádu? Z kapitoly 2 víme, že parciální derivace V podle zobecněných proměnných jsou (až na znaménko) zobecněné síly, $-\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j$. Ve (4.1) ale tyto derivace bereme v rovnovážné poloze – ovšem v ní jsou všechny síly nulové! To znamená, že členy prvního řádu jsou všechny rovny nule⁸.

Ve (4.1) tedy zbydou pouze členy druhého řádu:

$$V(q_j) \approx \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \bigg|_{q_j^{(0)}} \eta_j \eta_k .$$

Druhé derivace potenciální energie v rovnovážné poloze jsou konstanty. Pro stručnost zápisu je označíme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \bigg|_{q_j^{(0)}} \stackrel{\text{ozn.}}{=} V_{jk} . \quad (4.2)$$

Jak jsme už avizovali výše, od souřadnic q_j přejdeme k souřadnicím $\eta_j = q_j - q_j^{(0)}$. Potenciální energie je pak v naší aproximaci dána jednoduchým výrazem⁹

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r V_{jk} \eta_j \eta_k . \quad (4.3)$$

Poznamenejme ještě, že v dalších úpravách využijeme skutečnost, že V_{jk} jsou symetrické vzhledem k záměně indexů, tedy že platí¹⁰

$$V_{jk} = V_{kj} . \quad (4.4)$$

Kinetická energie

Kinetická energie soustavy N hmotných bodů je

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 . \quad (4.5)$$

Protože vazby nezávisí na čase¹¹, je $x_i = x_i(q_j(t))$ a složky rychlosti jsou dány vztahy

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j . \quad (4.6)$$

Po dosazení (4.6) do (4.5) dostáváme

⁸ Tentýž výsledek dostaneme, když si uvědomíme, že rovnováha je v minimu potenciální energie. V minimu musí být všechny první parciální derivace V rovny nule.

⁹ Zde již nepíšeme symbol „rovná se přibližně“, tedy $\doteq$. V některých učebnicích se aproximace potenciální energie odlišuje od přesné hodnoty V zvláštním symbolem, např. V' , my však pro jednoduchost budeme používat jen symbol V , z kontextu budeme vědět, že se jedná o aproximaci.

¹⁰ Předpokládáme, že podmínky pro záměnnost druhých parciálních derivací jsou splněny.

¹¹ Pokud by vazby závisely na čase, zřejmě by nemohla existovat v čase stálá rovnovážná poloha. Je tedy rozumné, že se v našem odvození omezujeme se na vazby holonomní skleronomní.

$$T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=1}^{3N} \left\{ \frac{1}{2} m_i \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \sum_{k=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \left(\sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (4.7)$$

Přejdeme-li k souřadnicím $\eta_j = q_j - q_j^{(0)}$, je zřejmé, že $\dot{q}_j = \dot{\eta}_j$. Navíc, jestliže výchylky z rovnovážné polohy považujeme za malé, je jasné, **rychlosti $\dot{\eta}_j$ jsou také malé**. (Jestliže výchylky jsou úměrné nějaké malé veličině ε , $\eta_j \sim \varepsilon$, je také $\dot{\eta}_j \sim \varepsilon$.) To znamená, že v (4.7) už máme aproximaci kinetické energie stejného řádu, jako byla aproximace (4.3) (tedy řádu ε^2), jestliže vezmeme výrazy v kulatých závorkách na druhém řádku (4.7) jako konstantní:

$$M_{jk} = \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \bigg|_{q_i^{(0)}} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \bigg|_{q_i^{(0)}} \quad (4.8)$$

Parciální derivace x_i podle q_j přitom bereme v rovnovážné poloze¹². Výsledek možná složitě vypadajících úvah je jednoduchý: kinetická energie je v dané aproximaci

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r M_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k \quad (4.9)$$

Poznamenejme, že podobně jako V_{jk} , jsou i koeficienty M_{jk} symetrické vůči přehození indexů¹³:

$$M_{jk} = M_{kj} \quad (4.10)$$

Lagrangián a Lagrangeovy rovnice pro malé kmity

Ze (4.3) a (4.9) okamžitě dostaneme vztah pro lagrangián v aproximaci malých kmitů¹⁴:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r (M_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - V_{jk} \eta_j \eta_k) \quad (4.11)$$

Pro Lagrangeovy rovnice 2. druhu potřebujeme parciální derivace

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_l} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_l} \left\{ \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r (M_{jk} \dot{\eta}_j \dot{\eta}_k - V_{jk} \eta_j \eta_k) \right\} = \sum_{j=1}^r M_{jl} \dot{\eta}_j \quad (4.12)$$

¹² Ve (4.7) byly tyto derivace brány v aktuální poloze hmotných bodů. Protože jde o polohy blízko rovnováhy, liší se hodnoty derivací jen nepatrně: $\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \bigg|_{q_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \bigg|_{q_i^{(0)}} + O(\varepsilon)$. Členy $O(\varepsilon)$ by po vynásobení $\dot{q}_j \dot{q}_k$ měly řád ε^3 – ale takové členy už v našem odvození zanedbáváme. Připomeňme, že symbol $q_i^{(0)}$ u svislé čáry (udávající, v kterém bodě bereme derivaci) znamená $(q_1^{(0)}, q_1^{(0)}, \dots, q_r^{(0)})$.

¹³ Je to vidět přímo z (4.8).

¹⁴ Je fascinující, že takto jednoduchý obecný tvar lagrangiánu popisuje systémy od jednoho závaží na pružině či matematického kyvadla, přes nejrůznější soustavy hmotných bodů spojených pružinami až třeba po 10^{26} atomů v nějakém krystalu, pokud bychom na dané atomy pohlíželi jako na klasické hmotné body spojené pružnými vazbami.

Ovšem

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_l} (\dot{\eta}_j \dot{\eta}_k) = \delta_{lj} \dot{\eta}_k + \dot{\eta}_j \delta_{lk} \quad (4.13)$$

takže z (4.12) dostáváme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_l} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r M_{jk} \delta_{lj} \dot{\eta}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r M_{jk} \delta_{lk} \dot{\eta}_j = \sum_{k=1}^r M_{lk} \dot{\eta}_k \quad (4.14)$$

Naprostu stejným postupem vyjde pro derivace podle η_j

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_l} = - \sum_{k=1}^r V_{lk} \eta_k \quad (4.15)$$

Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \eta_j} = 0$$

po dosazení (4.14) a (4.15) dají¹⁷

$$\sum_{k=1}^r (M_{jk} \ddot{\eta}_k + V_{jk} \eta_k) = 0 \quad (4.16)$$

pro $j = 1, \dots, r$. Máme tedy r rovnic pro r neznámých η_k .

Frekvence malých kmitů

Jak řešit rovnice (4.16)? A hlavně, jak z nich určit frekvence kmitů? Zkusme nejdříve předpokládat, že všechny hmotné body kmitají se stejnou frekvencí ω :¹⁸

$$\eta_k = \tilde{\eta}_k \cdot e^{i\omega t} \quad (4.17)$$

Amplitudy $\tilde{\eta}_k$ jsou pro různá k obecně různé, frekvence ω je pro všechna k stejná. Po dvojím derivování podle času je $\ddot{\eta}_k = -\omega^2 \cdot \tilde{\eta}_k \cdot e^{i\omega t}$. Dosazení do (4.16) dá

$$\sum_{k=1}^r (-\omega^2 M_{jk} + V_{jk}) \cdot \tilde{\eta}_k \cdot e^{i\omega t} = 0 \quad (4.18)$$

Po zkrácení $e^{i\omega t}$, resp. vynásobení $e^{-i\omega t}$ (a ještě -1) dostaneme

¹⁵ Je totiž $\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}_l} (\dot{\eta}_j \dot{\eta}_k) = \frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{\eta}_l} \dot{\eta}_k + \dot{\eta}_j \frac{\partial \dot{\eta}_k}{\partial \dot{\eta}_l}$ a $\frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{\eta}_l} = 0$ pro $j \neq l$ a $\frac{\partial \dot{\eta}_j}{\partial \dot{\eta}_j} = 1$.

¹⁶ Rozmyslete si, že obě sumy vlevo dají opravdu stejný příspěvek.

¹⁷ „Mezikrok“ je $\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^r M_{jk} \dot{\eta}_k \right) + \sum_{k=1}^r V_{jk} \eta_k = 0$. Ve (4.15) a (4.16) jsme také zaměnili index l za j .

¹⁸ A to ve všech směrech, kterými mohou kmitat.

¹⁹ Výchylky zapisujeme pomocí komplexního formalismu, který jsme poznali v úvodním kurzu mechaniky. Postup uvedený dále by však šel aplikovat, i pokud bychom předpokládali reálná řešení $\eta_k = \tilde{\eta}_k \cdot \cos(\omega t)$.

²⁰ Zde je vidět, proč bylo výhodné zvolit stejnou frekvenci; člen $e^{i\omega t}$ díky tomu můžeme vytknout a následně jím celou rovnici zkrátit.

$$\sum_{k=1}^r (\omega^2 M_{jk} - V_{jk}) \cdot \tilde{\eta}_k = 0, \text{ pro } j=1, \dots, r. \quad (4.18)$$

To je soustava r rovnic pro r neznámých čísel $\tilde{\eta}_k$. Můžeme ji zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \omega^2 M_{11} - V_{11} & \omega^2 M_{12} - V_{12} & \cdots & \omega^2 M_{1r} - V_{1r} \\ \omega^2 M_{21} - V_{21} & \omega^2 M_{22} - V_{22} & \cdots & \omega^2 M_{2r} - V_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega^2 M_{r1} - V_{r1} & \cdots & \cdots & \omega^2 M_{rr} - V_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_1 \\ \tilde{\eta}_2 \\ \cdots \\ \tilde{\eta}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Můžeme ji vyřešit pro libovolnou hodnotu ω ? Můžeme – ale pokud je matice na levé straně (4.19) regulární, bude řešením nulový vektor, to znamená amplitudy kmitů $\tilde{\eta}_k$ všech bodů budou nulové. Kmitání s nulovou amplitudou ale není žádné kmitání!

Nenulové amplitudy kmitů vyjdou pouze v případě, když matice na levé straně (4.19) je **singulární**. Nutnou a postačující podmínkou pro to je, že její determinant je roven nule, což můžeme symbolicky zapsat jako

$$\det |\omega^2 M_{jk} - V_{jk}| = 0. \quad (4.20)$$

Právě tato rovnice určuje hodnoty frekvencí kmitů. Rozepsáním determinantu bychom dostali polynom r -tého stupně v proměnné ω^2 . Podle základní věty algebry má tento polynom obecně r kořenů. To znamená, že rovnice (4.20) má obecně r řešení, dává r hodnot pro frekvence ω .²¹ Pro malé kmitý tedy dostáváme obecně r řešení

$$\eta_k^{(n)} = \tilde{\eta}_k^{(n)} \cdot e^{i\omega_n t}, \quad n=1, \dots, r. \quad (4.21)$$

Jak z nich dostat obecné řešení našeho problému? Rovnice (4.16) jsou lineární, takže jejich obecné řešení je prostě **superpozicí** řešení (4.21):

$$\eta_k = \sum_{n=1}^r \tilde{\eta}_k^{(n)} \cdot e^{i\omega_n t}, \quad \text{pro } k=1, \dots, r \quad (4.22)$$

Výsledné kmitání je složením kmitů různých frekvencí.²² O kmitech jednotlivých frekvencí mluvíme jako o různých **módech** kmitání. Při skutečném kmitání nemusejí být všechny módy vybudeny stejně, mohou mít různou amplitudu. Pro každý jednotlivý mód jsou přitom amplitudy kmitů jednotlivých bodů svázány rovnicemi (4.18) resp. (4.19).

²¹ Ve speciálních případech mohou některé kořeny zmíněného polynomu splývat, tedy být vícenásobné. V takovýchto případech splývají některé frekvence kmitů. Tyto speciální případy zde nebudeme blíže diskutovat. V obecném případě dostáváme r různých frekvencí kmitů.

²² Přitom jde o **harmonické kmitý**.

Příklady

Matematické kyvadlo²³

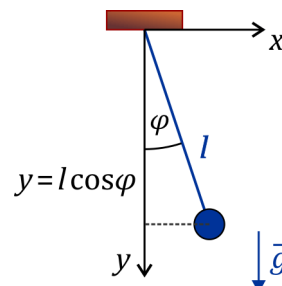
V příkladech v kap. 2 jsme pro matematické kyvadlo odvodili kinetickou energii

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \quad (4.23)$$

a potenciální energii

$$V = -mgl\cos\varphi. \quad (4.24)$$

Souřadnice φ je přitom právě odchylkou od rovnovážné polohy.



Vztah (4.23) pro kinetickou energii už upravovat nemusíme, má v sobě právě druhou mocninu zobecněné rychlosti. Potenciální energii bychom mohli rozvíjet kolem rovnovážné polohy $\varphi = 0$ s pomocí druhých derivací, viz (4.2). Jednodušší je ale použít známý rozvoj pro malá φ , $\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$, pro $|\varphi| \ll 1$. Aproximace lagrangiánu pro malé kmity je tedy²⁴

$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi^2.$$

Lagrangeova rovnice $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ v aproximaci malých kmitů po dosazení vychází

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) + mgl\varphi = 0. \quad (4.25)$$

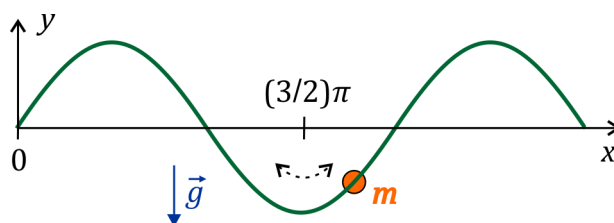
Rovnice (4.25) je již rovnicí pro harmonické oscilace, $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$, kde $\omega = \sqrt{g/l}$.

Kmity bodu vázaného na křivku

Uvažujme hmotný bod pohybující se po nějaké křivce, například

$$y = A \cdot \sin(x). \quad (4.26)$$

Rovnovážná poloha je v $x_0 = (3/2)\pi$, takže za novou souřadnici vezmeme $\eta = x - (3/2)\pi$.



Potenciální energie je $V = mgy$, kde $y = A \sin(x) = A \sin(\eta + 3\pi/2) = -A \cos(\eta) \approx -A + \frac{1}{2}A\eta^2$.

Kinetická energie je $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(1 + A^2 \sin^2 \eta)\dot{\eta}^2 \approx \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2$.²⁶ Lagrangián (v němž už nepíšeme konstantu v potenciální energii) je v aproximaci pro malé kmity $L = \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}mgA\eta^2$, Lagrangeova rovnice pak dává $\ddot{\eta} + gA\eta = 0$. Odtud frekvence malých kmitů je $\omega = \sqrt{gA}$.²⁷

²³ Už je tu zas... Když ono se na něm opravdu řada věcí velmi dobře ilustruje.

²⁴ Aditivní konstantu již do L nepíšeme.

²⁵ Zde x by muselo být bezrozměrné. Pokud bychom chtěli x měřit např. v metrech, museli bychom křivku popsat např. vztahem $y = A \cdot \sin(x/B)$. Zkuste si příklad vypočítat pro takto zadanou křivku.

²⁶ Pohyb hmotného bodu v y -ovém směru se v kinetické energii v dané aproximaci vůbec neprojevuje. Rozmyslete si, že to je rozumné.

²⁷ Výsledný vztah nevychází rozměrově právě proto, že jsme vzali $y = A \cdot \sin(x)$ a ne $y = A \cdot \sin(x/B)$.

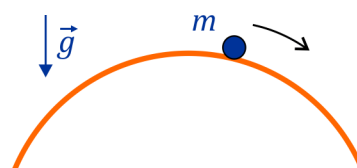
Poznámka k příkladům:

Pro jednoduchost jsme zde uvedli jen příklady s jedním stupněm volnosti. Proto jsme nemuseli počítat výše uvedeným postupem využívajícím determinant (v našem případě šlo o „matici“ 1×1) a vyšla jen jediná frekvence kmitů.

Závěrečné poznámky (aneb kdy popsáný postup nefunguje)

Zatím jsme mlčky předpokládali, že ω je reálné. Ovšem (4.20) dá polynom v proměnné ω^2 . Co když některé kořeny tohoto polynomu jsou záporné? Pak ω bude ryze imaginární. To ale znamená, že (4.17) dá $\tilde{\eta}_k \cdot e^{-|\omega|t}$ a $\tilde{\eta}_k \cdot e^{+|\omega|t}$. Tato řešení zjevně nepopisují kmitání! Odpovídá tento případ nějakému skutečnému pohybu?

Odpovídá – ovšem pohybu v blízkosti **labilní** rovnovážné polohy.²⁸ I toto řešení je zajímavé. Z jeho časového vývoje lze vidět, že například kulička položená na velké kouli v nepatrné vzdálenosti od vrcholu se bude zpočátku pohybovat tak, že její vzdálenost od vrcholu bude narůstat exponenciálně.



Může ovšem nastat případ, kdy námi popsáná aproximace využívající rozvoj do druhého řádu selže úplně. V rozvoji (4.1) jsme ponechali pouze členy druhého řádu. Ovšem co když jsou všechny tyto členy druhého řádu nulové?²⁹ Pak bychom členy vyššího řádu nemohli zanedbat. Příkladem by byl oscilátor, v němž by potenciální energie závisela na výchylce podle vztahu $V = k \cdot x^4$. Takovýto oscilátor kmitá, ale **nejde o harmonické kmity**.

²⁸ Naše řešení je aproximací pohybu i v okolí labilní rovnovážné polohy, ale jen na chvíli. Za nějakou dobu odchylky od rovnovážné polohy vzrostou (díky členu $e^{+|\omega|t}$), přestanou být malé a aproximace, které jsme výše užívali, přestanou být použitelné.

²⁹ Tedy všechny koeficienty V_{jk} ve vztazích (4.3) a následujících by byly rovny nule.