

Lagrangeovy rovnice prvního druhu

Jestliže existují Lagrangeovy rovnice *druhého druhu*, budí to silné podezření, že zřejmě existují i Lagrangeovy rovnice *prvního druhu*. Seznámíme se s nimi jen stručně a spíše pro úplnost. Někdy se však i tyto rovnice hodí – zejména v případech, kdy potřebujeme určit vazbové síly. V Lagrangeových rovnicích prvního druhu totiž vazbové síly explicitně vystupují.

Vazbové podmínky a síly v kartézských souřadnicích – jedna vazba

Potřebujeme napsat rovnice pro pohyb soustavy N hmotných bodů podrobených vazbám. Budeme uvažovat vazby holonomní skleronomní.

Polohu hmotných bodů popisuje $3N$ kartézských souřadnic x_i , $i = 1, \dots, 3N$. Uvažujme nejprve jen jednu vazbu. Její rovnici budeme psát:

$$G(x_1, \dots, x_{3N}) = 0 \quad (3.1)$$

Hmotné body se mohou pohybovat do takových směrů, že podmínka (3.1) zůstává zachována. I pro polohy bodů po posunutí tedy musí platit $G(x_1 + dx_1, \dots, x_{3N} + dx_{3N}) = 0$. Kombinací s (3.1) dostaneme vztah, který musí platit pro všechna posunutí dx_i slučitelná s vazbami²:

$$G(x_1 + dx_1, \dots, x_{3N} + dx_{3N}) - G(x_1, \dots, x_{3N}) = dG(x_i) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad (3.2)$$

Pro vazbové síly $F_i^{(v)}$ platí (také pro libovolná posunutí dx_i slučitelná s vazbami)³:

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(v)} \cdot dx_i = 0. \quad (3.3)$$

Vztah (3.3) určuje směr vazbových sil.⁴ Porovnáním s (3.2) vidíme, že podmínka (3.3) na směr vazbových sil je určitě splněna, když

$$F_i^{(v)} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i}. \quad (3.4)$$

Faktor λ zde ovlivňuje velikost síly, nikoli její směr.⁵

Celková síla působící na jednotlivé hmotné body je dána součtem aktivních sil $F_i^{(a)}$ a vazbových sil (3.4). Druhý Newtonův zákon, čili pohybovou rovnici pro pohyb bodů soustavy, tedy můžeme zapsat jako:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i^{(a)} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (3.5)$$

Rovnice (3.5) spolu s rovnicí (3.1) již jsou Lagrangeovými rovnicemi prvního druhu pro soustavu hmotných bodů (s jednou vazbou).

¹ Příkladem pro pohyb matematického kyvadla je rovnice $x^2 + y^2 - l^2 = 0$.

² Posunutí dx_i zde bereme jako nekonečně malá, pracujeme s nimi proto jako s diferenciály.

³ Viz odvození zobecněného principu virtuální práce v kapitole 1.

⁴ V jednoduchých situacích, např. když je hmotný bod vázán na plochu, to jednoduše znamená, že vazbová síla je kolmá na danou plochu.

⁵ Zvědavý čtenář by mohl namítat, že jsme zatím dokázali jen to, že (3.4) splňuje podmínku (3.3) – nemůže ale této podmínce vyhovovat i nějaká jiná vazbová síla? Jinak řečeno, dokázali jsme, že (3.4) je pro (3.3) podmínkou postačující. Je ale i podmínkou nutnou? Je tomu opravdu tak – důkaz můžete najít v Dodatku A.

Více vazeb

Jak je tomu pro více vazeb? Místo jediné rovnice (3.1) máme s rovnic $G_k(x_1, \dots, x_{3N}) = 0$, $k = 1, \dots, s$.⁶

Vazbové síly jsou součtem sil od všech vazeb, takže $F_i^{(v)} = \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_i}$. Druhý Newtonův zákon pak dá

$$m_i \ddot{x}_i = F_i^{(a)} + \sum_{k=1}^s \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N \quad (3.6)$$

Máme tedy $3N$ rovnic pro $3N+s$ neznámých $x_i(t)$, $\lambda_k(t)$. Potřebujeme tedy ještě s rovnic. To jsou právě rovnice vazeb

$$G_k(x_1, \dots, x_{3N}) = 0, \quad k = 1, \dots, s \quad (3.7)$$

Rovnice (3.6) a (3.7) jsou kýženy **Lagrangeovy rovnice prvního druhu**.

Oproti Lagrangeovým rovnicím druhého druhu je jich výrazně víc ($3N+s$), ale zato z nich můžeme určit vazbové síly.

Příklad

Lagrangeovy rovnice prvního druhu pro matematické kyvadlo

Vazba je vyjádřena podmínkou $G(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$.

Derivace G podle x a y jsou: $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial G}{\partial y} = 2y$. Aktivní síla (tíhová) působící

na kyvadlo, má složky $F_x^{(a)} = 0$, $F_y^{(a)} = mg$.⁷ Lagrangeovy rovnice 1. druhu pro kyvadlo tedy mají tvar

$$m \ddot{x} = \lambda 2x, \quad (3.8)$$

$$m \ddot{y} = \lambda 2y + mg, \quad (3.9)$$

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0. \quad (3.10)$$

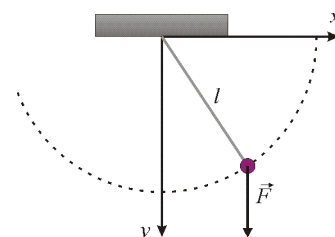
Jak z nich vypočítat vazbovou sílu? Stačí určit hodnotu λ . Ukážeme zde (ne úplně krátký) postup, jak z rovnic (3.8), (3.9) a (3.10) hodnotu λ určit.

Když derivujeme (3.10) podle t , získáme $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$. Derivujeme-li tento vztah ještě jednou, dostaneme (po zkrácení 2) $\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0$. Odtud je

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (3.11)$$

Když (3.8) násobíme x a (3.9) y a výsledné vztahy sečteme, dostaneme

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = \lambda 2(x^2 + y^2) + mgy = \lambda 2l^2 + mgy. \quad (3.12)$$



⁶ V předchozí kapitole jsme hodně užívali počet stupňů volnosti r . Je-li počet vazeb roven s , platí $s + r = 3N$.

⁷ V obrázku je značena jen $\vec{F}$.

⁸ Vypočteme-li odsud λ a z něj pak složky vazbových sil, lze ukázat, že velikost vazbové síly – tedy tahu ve vlákně závěsu – je rovna součtu průmětu tíhové síly do směru vlákna a dostředivé síle, která zakřivuje pohyb hmotného bodu.

Dosazením ze vztahu (3.11) pak je

$$-m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \lambda 2l^2 + mgy. \quad (3.12)$$

Násobíme-li (3.8) $\dot{x}$ a (3.9) $\dot{y}$ a výsledné vztahy sečteme, dostáváme po úpravách (s využitím toho, že $x^2 + y^2 = l^2 = \text{konst.}$):

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = \lambda 2(x\dot{x} + y\dot{y}) + mgy = \lambda \frac{d(x^2 + y^2)}{dt} + mgy = mg \frac{dy}{dt}. \quad (3.13)$$

Levou stranu (3.13) lze upravit jako $m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = \frac{1}{2}m \frac{d(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{dt}$, takže z (3.13) plyne

$$\frac{1}{2}m \frac{d(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{dt} = mg \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2gy) = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2gy + C, \quad (3.14)$$

kde C je konstanta, kterou můžeme určit z počátečních podmínek. (Uvědomte si, že (3.14) vlastně vyjadřuje zákon zachování energie.)

Kombinací výsledku (3.14) a (3.12) nakonec dostáváme

$$\lambda 2l^2 + mgy = -m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -2mgy - mC$$

a odtud

$$\lambda = -\frac{3mgy}{2l^2} - \frac{mC}{2l^2}. \quad (3.15)$$

Vektor vazbové síly pak je

$$\vec{F}^{(v)} = (2\lambda x, 2\lambda y).^9$$

Poznamenejme ještě, že pokud bychom chtěli pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu *řešit* pohyb matematického kyvadla, museli bychom (3.15) dosadit do (3.8) a (3.9) a tyto rovnice pak řešit.

Závěrečná poznámka

Vidíme, že celý postup je poměrně zdlouhavý, takže pokud nepotřebujeme určovat vazbové síly, dáme zřejmě přednost řešit pohyb pomocí Lagrangeových rovnic *druhého* druhu.

Na druhou stranu, v případě Lagrangeových rovnic prvního druhu nemusíme uvažovat, jak vhodně zvolit zobecněné souřadnice (užíváme jen kartézské), takže tento postup může být vhodný pro výpočet pohybu soustav hmotných bodů s vazbami pomocí počítače.¹⁰

⁹ Můžeme si zkontrolovat, že v případě kyvadla, které nekývá a visí kolmo dolů, plyne z (3.14) $C = -2gy$, z čehož po dosazení do (3.15) je $\lambda = -\frac{1mgy}{2l^2}$ a protože v daném případě $y=l$, vyjde pro y -ovou složku vazbové síly $F_y^{(v)} = 2\lambda y = -mgy^2/l^2 = -mg$, což je očekávaný výsledek.

¹⁰ Poznamenejme ovšem, že numerický výpočet soustavy rovnic, z nichž některé jsou diferenciální a některé algebraické (vazbové podmínky, např. (3.10)) také není úplně jednoduchou záležitostí.

Dodatek A. Poznámka pro zvědavé: Jednoznačnost určení vazbových sil.

Zabývejme se pro jednoduchost opět jen případem jedné vazby $G(x_1, \dots, x_{3N}) = 0$. Výše jsme odvodili, že vazbové síly definované vztahem (3.4):

$$F_i^{(v)} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (3.16)$$

vyhovují podmínce (3.3), tj.

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(v)} \cdot dx_i = 0, \quad (3.17)$$

kde dx_i jsou libovolná posunutí slučitelná s vazbami.

Zvědavý čtenář či čtenářka by ale mohli namítat, že jsme dosud nedokázali **jednoznačnost** směru vazbových sil.¹¹ Nemohla by podmínce (3.17) vyhovovat i nějaká jiná vazbová síla, tj. síla mířící poněkud jiným směrem?

Jiná síla – ta, která by byla odlišná od (3.16) – by musela mít tvar

$$\tilde{F}_i^{(v)} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} + F_i^\perp, \quad (3.18)$$

kde $F_i^\perp$ je síla kolmá na směr daný (3.16)¹². Kolmost znamená, že jejich skalární součin je roven nule:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot F_i^\perp = 0. \quad (3.19)$$

Zvolme nyní posunutí dx_i právě ve směru $F_i^\perp$,

$$dx_i = k F_i^\perp, \quad (3.20)$$

kde k je nějaká nenulová konstanta¹³. Snadno lze ověřit¹⁴, že tato posunutí splňují (3.2), tj. $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G}{\partial x_i} dx_i = 0$.

To znamená, že posunutí (3.20) jsou slučitelná s vazbami.

Mají-li $\tilde{F}_i^{(v)}$ být vazbovými silami, musí splňovat (3.17), tj. musí platit

$$\sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i^{(v)} \cdot dx_i = 0. \quad (3.21)$$

Dosadíme-li sem (3.18) a (3.20), dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i^{(v)} \cdot dx_i = \lambda \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + F_i^\perp \right) \cdot dx_i = \sum_{i=1}^{3N} \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot dx_i + \sum_{i=1}^{3N} F_i^\perp \cdot dx_i = \sum_{i=1}^{3N} F_i^\perp \cdot (k F_i^\perp) = k \sum_{i=1}^{3N} (F_i^\perp)^2. \quad (3.22)$$

Odtud plyne, že musí být $F_i^\perp = 0$ (pro všechna i), takže $\tilde{F}_i^{(v)} = F_i^{(v)} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i}$, tudíž vztah (3.16) (tj. (3.4))

určuje směr vazbových sil opravdu jednoznačně. Jediné, co pak pro jednoznačné určení vazbových sil potřebujeme určit, je multiplikativní konstanta λ .

¹¹ V určení vazbové síly je samozřejmě nejednoznačnost daná neznámou konstantou λ ; ta má ale vliv na velikost vazbové síly, ne na její směr.

¹² Rozmyslete si, že je tomu opravdu tak. (Aby síla byla jiná, musíme k (3.16) přičíst člen lineárně nezávislý na (3.16) – a ten lze rozložit na část ve směru (3.16) a na část ve směru kolmém.)

¹³ Aby dx_i bylo infinitesimální, je k samozřejmě také infinitesimální, ale to nijak neovlivní další úvahy.

¹⁴ Dosadte (3.20) do (3.2) a využijte (3.19).