Bakalářské zkoušky (příklady otázek z matematiky)

podzim 2019

1 Limity funkcí (3 body)

1. Definujte limitu funkce v bodě.
2. Nechť f je funkce definovaná na $\mathbb{R}$.

   Uvažujme následující dvě tvrzení P a Q:
   P: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
   Q: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná jako $a_n = f(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ má limitu nula.
   Rozhodněte, zda P implikuje Q a zda Q implikuje P, pokud:

   (a) f je libovolná funkce,

   (b) f je monotónní fukce,

   (c) f je spojitá funkce.

   Svá tvrzení nemusíte zdůvodňovat.
3. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x} .$$

2 Určitý integrál (3 body)

1. Formulujte větu o substituci pro určitý integrál.
2. Spočtěte určitý integrál

$$\int_1^2 \frac{3^x+2}{3^{2x}+3^x}\, dx$$

3. Rozhodněte, ve kterém z intervalů leží výsledek: $(-\infty, 0], (0, 1/2], (1/2, 1]$, $(1, 3], (3, \infty]$. (Správné řešení lze nalézt i bez počítání integrálu – numerické chyby při výpočtu neomlouvají chybné určení intervalu.)

3 Metrické prostory (3 body)

Nechť (X, d) je metrický prostor, $|X| \geq 2$.

1. Rozhodněte, zda je (X, d') metrický prostor pro d' definovanou jako

$$d'(x, y) = \min(d(x, y), 1)$$

   pro všechna $x, y \in X$. Zdůvodněte své rozhodnutí.
2. Vzdálenost mezi dvěma neprázdnými podmnožinami A a B metrického prostoru (X, d) definujeme jako

$$D(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a, b).$$

   Ukažte, že D **není** metrika na $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ (kde $\mathcal{P}(X)$ označuje potenční množinu X).

4 Lineární zobrazení (3 body)

Buďte $f, g\colon U \to V$ lineární zobrazení. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí:

1. $Ker(f) \cap Ker(g) \subseteq Ker(f + g)$,
2. $f(U) + g(U) = (f + g)(U)$.

5 Cauchyho–Schwarzova nerovnost (3 body)

1. Definujte pojem "norma indukovaná skalárním součinem".
2. Zformulujte Cauchyho–Schwarzovu nerovnost.
3. Dokažte, že pro lineárně závislé vektory se obě strany Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti rovnají.

6 Náhodný graf (3 body)

Mějme náhodný graf na vrcholech $\{1, 2, \dots, 100\}$ kde pravděpodobnost výběru hrany je $1/3$ nezávisle pro každou hranu.

1. Jaká je pravděpodobnost, že podgraf indukovaný náhodně vybranými čtyřmi vrcholy bude izomorfní C_4?
2. Jaká je pravděpodobnost, že podgraf indukovaný vrcholy $\{10, 20, 30, 40\}$ bude izomorfní C_4, za předpokladu, že dvojice vrcholů $\{10, 30\}$ a $\{20, 40\}$ netvoří hranu?
3. Určete střední hodnotu počtu indukovaných podgrafů izomorfních C_4.

Výsledky není třeba důsledně vyčíslovat, komb. čísla, faktoriály, mocniny atd. lze ponechat.

7 Binární relace (3 body)

1. Definujte, co znamená, že binární relace $f \subseteq X \times X$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
2. Rozhodněte, zda má tyto vlastnosti (určete které) relace $f_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná
$$(a, b) \in f_1 \Leftrightarrow a, b \text{ jsou soudělná.}$$
3. Rozhodněte, zda má tyto vlastnosti (určete které) relace $f_2 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná
$$(a, b) \in f_2 \Leftrightarrow a \text{ dělí } b.$$

8 Kostry grafů (3 body)

Mějme graf G na vrcholech $\{u_1, \dots, u_{100}, v_1, \dots, v_5\}$, přičemž vrcholy $u_1, \dots, u_{100}$ indukují úplný graf, vrcholy $v_1, \dots, v_5$ indukují cyklus (v tomto pořadí), graf obsahuje hranu u_1, v_1 a žádné další hrany v grafu G nejsou.

Váha libovolné hrany $u_i u_j$ pro $1 \leq i < j \leq 100$ je 5, váha hrany $v_i v_j$ pro $j = (i \bmod 5) + 1$ je $\max\{i, j\}$ a váha hrany $u_1 v_1$ je 10.

1. Definujte pojem "kostra grafu" a "minimální kostra grafu" (včetně předpokladů úlohy hledání minimální kostry).
2. Určete váhu minimální kostry grafu G.
3. Určete počet všech koster grafu G a počet minimálních koster grafu G.

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici, co je *bezesporná teorie* (v predikátové logice).
2. Vyjádřete následující tvrzení jako výroky φ_1, φ_2, φ_3 nad $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$, kde prvovýroky r, s, t reprezentují (po řadě), že "Radka / Sára / Tom je ve škole".
   (a) *Není-li Tom ve škole, není tam ani Sára.*
   (b) *Radka bez Sáry do školy nechodí.*
   (c) *Není-li Radka ve škole, je tam Tom.*
3. Zjistěte, zda je teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ bezesporná pomocí tablo metody, implikačního grafu, či rezolučního uzávěru. Tedy nestačí pouze vyzkoušet pravdivostní ohodnocení.