Bakalářské zkoušky (příklady otázek z matematiky)

léto 2022

1 Vlastní čísla (3 body)

Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická matice.

1. Ukažte, že matice A^2 má nezáporná vlastní čísla.
2. Ukažte, že hodnost matice A je rovna počtu jejích nenulových vlastních čísel (počítáno včetně násobností).

2 Charakteristický polynom (3 body)

1. Definujte charkteristický polynom $p_A(\lambda)$ matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
2. Spočtěte charakteristický polynom reálné matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Najděte všechny symetrické reálné matice A s charakteristickým polynomem $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$.

3 Projekce (3 body)

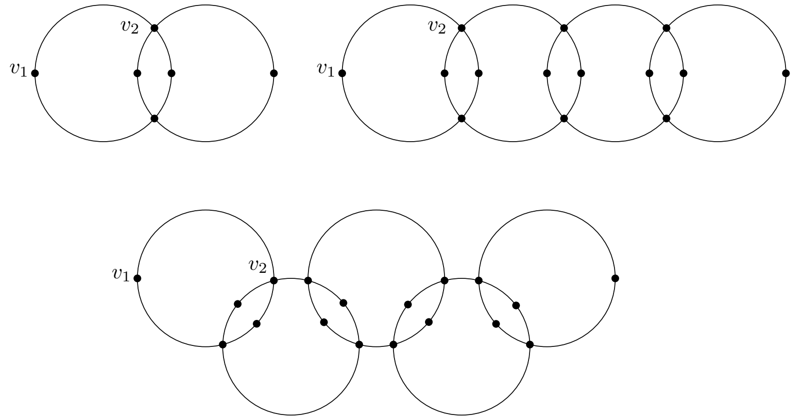
Najděte směrnici $p \in \mathbb{R}^3$ přímky, která prochází počátkem a víme, že všechny tři body $u = (1, 2, 3)^T, v = (0, 3, 1)^T, w = (8, 1, 2)^T$ se při projekci na tuto přímku zobrazí na stejný bod.

4 Částečná uspořádání (3 body)

1. Definujte pojmy řetězec a antiřetězec (nezávislá množina) v částečném uspořádání.
2. Zformulujte větu o vztahu velikosti nosné množiny částečného uspořádání vzhledem k délkám jejich řetězců a antiřetězců.
3. Kolik nejdelších řetězců a antiřetězců má částečné uspořádání $(\mathcal{X}, \subseteq)$, kde $\mathcal{X} = \{A \subseteq \{1, \ldots, 10\} : |A| \in \{2, 3, 7\}\}$?

5 Grafy (3 body)

1. Definujte pojmy cesta, tah, sled, hamiltonovská cesta a eulerovký tah.
2. Vyslovte větu o nutné a postačující podmínce pro existenci eulerovského tahu v orientovaných grafech.
3. Pro každý ze tří grafů na obrázku určete počet různých Eulerovských tahů takových, že tah začíná vyznačenou dvojicí vrcholů v_1, v_2.



6 Posloupnosti (3 body)

Nechť $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$ je posloupnost reálných čísel.

1. Definujte, co znamená, že (a_n) konverguje.
2. Definujte, co znamená, že (a_n) je Cauchyova.
3. Jaký je vztah mezi posloupnostmi v 1 a ve 2? Odpověď zdůvodněte.
4. Definujte, co znamená, že (a_n) je omezená.
5. Dokažte, že když (a_n) je Cauchyova, pak je omezená.

7 Řady (3 body)

Nechť $R := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je (nekonečná) řada reálných čísel.

1. Definujte její n-tý částečný součet s_n.
2. Definujte její součet s.
3. Dokažte, že když řada R konverguje (tj. R má konečný součet), pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
4. Uveďte příklad řady R, pro kterou $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ale R má součet $+\infty$. Odpověď zdůvodněte.

8 Derivace (3 body)

Nechť $\delta > 0$ a $f : (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$ je reálná funkce (definovaná na δ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$).

1. Definujte derivaci $f'(a)$.
2. Řekněme, že tato derivace existuje a $f'(a) \in \mathbb{R}$. Čemu se potom rovná $(f(x)^2)'(a)$?
3. Řekněme, že tato derivace existuje, $f'(a) \in \mathbb{R}$ a $f(a) \neq 0$. Čemu se potom rovná $(1/f(x))'(a)$?
4. Spočtěte $(x^x)'(1)$.

Své odpovědi samozřejmě zdůvodněte.

9 Logika (3 body)

1. Uveďte definici pojmu *model teorie* a znění *věty o kompaktnosti* ve výrokové logice.
2. Nechť $\mathcal{S} = \{S_i \subseteq \mathbb{N} \mid i \in \mathbb{N}\}$ je spočetně nekonečný systém konečných množin. Označme si jejich prvky $S_i = \{a_1^i, \ldots, a_{s_i}^i\}$, kde $s_i = |S_i| \in \mathbb{N}$. Nechť prvovýrok p_j^i znamená, že *"číslo j bylo vybráno z množiny S_i"*. Ukažte, jak pro $\mathcal{S}$ sestrojit výrokovou teorii $T_{\mathcal{S}}$ nad $\mathbb{P} = \{p_j^i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ takovou, že $T_{\mathcal{S}}$ má model, právě když $\mathcal{S}$ má *systém různých reprezentantů* (tedy z každé množiny lze vybrat nějaký prvek tak, že vybrané prvky budou navzájem různé).

3. *Hallova věta* pro konečný systém $\mathcal{S}$ konečných množin říká, že $\mathcal{S}$ má systém různých reprezentantů, právě když pro každý konečný podsystém $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ platí, že $|\mathcal{T}| \leq |\bigcup_{S \in \mathcal{T}} S|$. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že stejná věta platí i pro spočetně nekonečný systém $\mathcal{S}$ konečných množin.