Přijímací zkouška z matematiky v roce 2010/11 na navazující magisterské studium

VARIANTA A

Příklad 1 (25 bodů)

Zjistěte, pro která reálná x je řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x \arcsin \frac{1}{n}$$

konvergentní.

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

(i) Určete definiční obor funkce f.
(ii) Zkoumejte spojitost funkce f.
(iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f.
(iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
(v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f.
(vi) Vypočtěte asymptoty.
(vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f.

Příklad 3 (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce

$$f(x, y) = \cos(x + y)$$

nabývá na množině

$$M = \{[x, y];\ x^2 + y^2 = \pi^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 4 (25 bodů)

V komplexním vektorovém prostoru $\mathbb{C}^n$ máme podprostor V. Řekneme, že V má reálnou bazi, pokud existuje $B \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že $V = \langle B \rangle$ Dokažte, že V má reálnou bázi právě když pro každé $v = (x_1, ..., x_n) \in V$ je také $\bar{v} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in V$. Jednotlivé kroky zdůvodněte podrobně. Dále rozhodněte, zda pro $n = 4$ a $V = \langle (1+i, 2-i, 3+2i, 4-2i), (2, 1-i, 3-2i, 4+2i) \rangle \subseteq \mathbb{C}^4$ má V reálnou bázi.