

PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA NA NAVAZUJÍCÍ MAGISTERSKÉ STUDIUM 2012/13

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Vzorové zadání

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_M \frac{y}{2-x} d\lambda(x, y, z),$$

kde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, 2x + y + z < 4\}$ a λ je Lebesgueova míra v \mathbb{R}^3 .

Příklad 2 (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce $f(x, y) = (1+x)y^2$ nabývá na množině

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 3 (25 bodů)

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou

$$f(x; \theta) = \begin{cases} c_\theta x(1+x)^{-(\theta+2)} & x > 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad \text{kde } \theta > 0 \text{ je neznámý parametr.}$$

- (i) Vypočtěte konstantu c_θ .
- (ii) Najděte maximálně věrohodný odhad parametru θ .
- (iii) Spočítejte Fisherovu míru informace pro toto rozdělení.

Příklad 4 (25 bodů)

Uvažujte aktiva $1, \dots, N$. Jejich výnosy jsou náhodné veličiny se středními hodnotami (očekávanými výnosy) $r = (r_1, \dots, r_N)^\top$ (symbol $^\top$ znamená transpozici) a varianční maticí \mathbf{V} . Předpokládejme, že investor investuje bohatství ve výši $W = 1$. Dále předpokládejme, že prodeje nakrátko (short sales) jsou povoleny.

- (i) Vysvětlete pojem portfolia.
- (ii) Vyjádřete obecně očekávaný výnos portfolia a rozptyl výnosu portfolia.
- (iii) Uvažujte dvě aktiva 1 resp. 2 s očekávanými výnosy 8% resp. 14% a varianční maticí

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 36 \end{pmatrix} [\%]^2.$$

Najděte portfolio s minimálním rozptylem výnosu portfolia a spočtěte jeho očekávaný výnos.