

Studijní program Matematika
Přijímací zkouška na navazující magisterské studium 2011/12
Varianta A

Příklad 1 (25 bodů)

Vypočtěte

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin^2 x \, dx.$$

Příklad 2 (25 bodů)

Funkce f je dána předpisem

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}.$$

- (i) Určete definiční obor funkce f .
- (ii) Zkoumejte spojitost funkce f .
- (iii) Vypočtěte limity funkce v krajních a nevlastních bodech definičního oboru funkce f .
- (iv) Zkoumejte monotonii této funkce. Zjistěte, zda funkce f má lokální extrémy — pokud ano, vypočtěte je. Nabývá funkce na svém definičním oboru největší a nejmenší hodnoty?
- (v) Zkoumejte konvexitu (konkávnost) funkce f .
- (vi) Vypočtěte asymptoty.
- (vii) Na základě provedených výpočtů načrtněte graf funkce f .

Příklad 3 (25 bodů)

Zjistěte, zda funkce

$$f(x, y, z) = \arctg \, xyz$$

nabývá na množině

$$M = \{[x, y, z]; \, x^2 + y^2 + z^2 = 1, \, y \geq 0, \, z \geq 0\}$$

největší (nejmenší) hodnoty. Pokud ano, vypočtěte je.

Příklad 4 (25 bodů)

Zjistěte, pro která $a, b \in \mathbb{Z}$ bude matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 1 & 2+a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b-6 & 7 \\ 1 & 2-a & 2-b & 1 \end{pmatrix}$$

regulární. Dále určete, pro která taková $a, b \in \mathbb{Z}$ bude mít matice A^{-1} všechny prvky celočíselné.