PETR HOLICKÝ
ONDŘEJ F. K. KALENDA

METODY ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

pro 2. až 4. semestr

matfyzpress

PETR HOLICKÝ
ONDŘEJ F. K. KALENDA

METODY ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

pro 2. až 4. semestr

matfyzpress

PRAHA 2006

ISBN 80-86732-72-X
ISBN 80-85863-85-5 (1. vydání)

Obsah

Předmluva

Tato publikace je určena především studentům kurzů matematické analýzy na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Jejím cílem je vysvětlit a ilustrovat základní metody řešení početních příkladů k látce, která je ve zmíněných kurzech zpravidla přednášena.

Navazujeme zde na publikaci L. Zajíčka „Vybrané úlohy z matematické analýzy“ ([Z]). Ta obsahuje jistý výběr doporučených příkladů včetně výsledků a návodů k látce základního kurzu matematické analýzy v 1. a 2. ročníku oboru matematika. Dále na vybraných řešených příkladech ilustruje metody řešení úloh vážících se převážně k diferenciálnímu počtu reálných funkcí jedné proměnné. Naším cílem bylo proto doplnit publikaci L. Zajíčka o text, ve kterém předvedeme základní metody řešení početních úloh ke standardní látce z integrálního počtu funkcí jedné proměnné (nezahrnuje teorii Lebesgueova integrálu), úloh na vyšetřování konvergence číselných řad, úloh na řešení základních typů diferenciálních rovnic a jejich soustav, úloh z diferenciálního počtu reálných funkcí více proměnných, úloh na vyšetřování extrémů funkcí více proměnných, úloh na studium konvergence posloupností a řad funkcí, speciálně mocninných řad a Fourierových řad.

Hlavní důraz je kladen na prezentaci nejčastěji užívaných početních metod, které je k úspěšnému absolvování kurzu matematické analýzy třeba zvládnout. Nesnažíme se proto zahrnout soustavněji obtížnější úlohy, jejichž řešení vyžaduje méně běžné obraty („triky“), ani předvést co nejelegantnější řešení. Pokud se vám podaří najít vlastní postup odlišný od námi prezentovaného, bude to chvályhodné. Jestliže si nebudete jisti, zda vaše řešení je korektní, snažte se o tom raději ujistit konzultací s některým ze svých učitelů. Jistě při pečlivém studiu textu narazíte na chyby. Budeme vám vděčni, pokud nás na ně upozorníte.

Většinou uvádíme formulace tvrzení, na nichž jsou řešení následujících úloh založena, a pak dokumentujeme vybrané metody zpravidla na jediné k tomu zvolené úloze. Formulace tvrzení se snažíme volit co nejvhodněji pro užití v početních příkladech, tedy ne nutně v nejsilnější formě (to se týká např. druhé věty o substituci, kterou možná znáte z přednášky v odlišné formě). Někdy se namísto formulace tvrzení odkazujeme na literaturu. Volíme pokud možno česky psanou a dobře dostupnou literaturu, jejíž seznam je na konci textu. Řešení prvních úloh v každém oddílu jsou podrobnější, zatímco v dalších úlohách již předvedené či rutinní postupy popisujeme stručněji či je zcela přenecháváme čtenáři.

Předkládaná publikace by tedy měla umožnit studentovi porozumět základním početním metodám a ukázat mu, jak lze řešení dostatečně přesným a přiměřeně podrobným způsobem zapsat. K aktivnímu osvojení metod je ovšem potřeba spočítat řadu dalších příkladů, které lze najít v uvedené publikaci [Z] a v jiných sbírkách příkladů. Řešené příklady lze najít též např. ve sbírkách [K1]-[K4]. Naše publikace si neklade za cíl, abyste po jejím prostudování dokázali řešit obtížnější „problémové“ úlohy či abyste bez potíží bez dalšího studia uměli odhadnout, jakou metodu nebo jakou kombinaci metod máte pro daný příklad volit.

Chtěli bychom vás též upozornit na to, že ač v základních kurzech matematické analýzy jde o poměrně jasně vymezenou látku, jejíž výklad na Matematicko-fyzikální fakultě je jistě silně ovlivněn dlouholetými tradicemi, přesto se v různých kurzech trochu liší. Proto doporučujeme, abyste si pečlivě porovnali námi používaná tvrzení s těmi, která znáte z přednášky, kterou navštěvujete, a abyste se v případě odlišností snažili rozdílům porozumět nebo se poradili se svými učiteli. Jistě se setkáte též s tím, že námi používaná terminologie a značení se budou lišit od těch, které znáte z přednášek. To by nemělo působit potíže a jistě se s podobnými odlišnostmi setkáváte i v jiných učebnicích. S takovými odchylkami se můžete setkat např. při značení uzavřených intervalů $[a,b]$ či $\langle a,b\rangle$, při značení prvků $\mathbb{R}^n$ jako $(x_1,\ldots,x_n)$ či $[x_1,\ldots,x_n]$, při značení přirozeného logaritmu log či ln a podobně. Měli bychom upozornit, abyste si pečlivěji povšimli našeho značení množiny všech primitivních funkcí na daném otevřeném intervalu pomocí symbolů $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathbf{C}$. Možná se setkáte s odlišným značením, např. $\int f(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(x)$. Povšimněte si též, že používáme přednostně „zobecněný Riemannův integrál“ s odvoláním na učebnici integrálního počtu V. Jarníka. Podstatné je, že pro spojité funkce na otevřeném intervalu jde o Newtonův integrál a pro funkce spojité na uzavřeném intervalu i o Riemannův integrál.

Děkujeme především kolegovi Prof. L. Zajíčkovi, DrSc. za jeho iniciativu, bez níž by tato učebnice nevznikla i za celou řadu připomínek, kterými významně pomohl k vylepšení našeho textu. Za řadu užitečných připomínek děkujeme též Doc. O. Johnovi, CSc., Doc. J. Veselému, CSc. a Mgr. M. Zelenému, Dr.

Poznámka k druhému vydání: Při přípravě druhého vydání jsme opravili chyby v původním textu, o nichž jsme věděli. Za upozornění na některé z nich děkujeme Doc. O. Johnovi, CSc. a Prof. L. Zajíčkovi, DrSc. Navíc jsme řešení některých příkladů napsali podrobněji, doplnili jeden příklad do §29 a přidali §71, v němž ukazujeme další použití věty o vázaných extrémech.

1. Primitivní funkce

V této kapitole si na vybraných příkladech předvedeme základní metody hledání primitivních funkcí k zadané funkci. Primitivní funkcí k funkci $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ na intervalu (a,b) se rozumí funkce $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ taková, že $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$. Je-li zadána reálná funkce f na podmnožině $\mathbb{R}$, pak úlohou o hledání všech primitivních funkcí k f rozumíme hledání všech F definovaných na nějakém otevřeném intervalu I takových, že F je primitivní funkcí k f na I. Na každém intervalu je F určena (pokud existuje) „jednoznačně až na přičtení konstantní funkce“, což zde zapisujeme s použitím symbolu $\mathbf{C}$ ve tvaru

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathbf{C} \text{ na intervalu } I.$$

Přesněji, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ zde značí množinu všech primitivních funkcí k funkci f na I a $\mathbf{C}$ množinu všech konstantních funkcí na I. Symbol $F(x) + \mathbf{C}$ pak označuje množinu všech funkcí tvaru $F(x) + c$ na I, kde $c \in \mathbb{R}$. Například tedy $F(x) + \mathbf{C} = G(x) + \mathbf{C}$ na I, pokud je funkce $F - G$ konstantní na intervalu I.

Mluvíme-li o součtu $\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$ či o násobku $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ nenulovým reálným číslem r, užíváme konvenci, že $(F(x)+\mathbf{C}) + (G(x)+\mathbf{C}) = (F(x)+G(x)) + \mathbf{C}$ a $r(F(x) + \mathbf{C}) = rF(x) + \mathbf{C}$. (Totéž bychom mohli zavést i pro nulový násobek, ale odporovalo by to běžně užívané konvenci.) Všimněte si, že provádíme příslušné operace jen na „reprezentanty“ F a G. S množinami primitivních funkcí tedy pracujeme tak, jakoby to byly funkce, ale nesmíme zapomenout, že výsledek bude opět určen až na přičtení konstantní funkce.

Úloha o hledání primitivních funkcí je zřejmě vyřešena, když najdeme primitivní funkci k f na všech maximálních otevřených intervalech, na kterých existuje. Tak budeme také při řešení postupovat. Často se stručně píše například

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + \mathbf{C},$$

aniž se specifikuje interval, ke kterému se rovnost vztahuje. Přesněji se tím ovšem rozumí, že uvedený vztah platí pro všechny otevřené intervaly obsažené v definičním oboru $\frac{1}{\cos^2 x}$, tj. především na maximálních otevřených intervalech definičního oboru, kterými jsou v uvedeném případě intervaly $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

§1. Známé derivace. O řadě funkcí víme, že jsou derivací některé elementární funkce. Například $e^x = (e^x)'$, $nx^{n-1} = (x^n)'$ ap. Užijeme-li navíc znalostí o derivaci násobku a součtu funkcí, můžeme hledat primitivní funkce k některým *elementárním funkcím a jejich lineárním kombinacím.*

P ř í k l a d   Spočtěte $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$, tj. najděte všechny primitivní funkce k funkci $\cos^2 \frac{x}{2}$.

Řešení. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ■

§2. Lepení primitivních funkcí. Pokud umíme nalézt primitivní funkci k dané funkci na některých intervalech (a,b), ale neumíme to přímo pro maximální intervaly, na kterých existuje, pak užíváme často *„metodu lepení“* primitivních funkcí.

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int |x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Snadno nahlédneme, že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(0,\infty)$ a že $\int |x|\,\mathrm{d}x = \int(-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$ na intervalu $(-\infty,0)$. Tedy pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $\frac{x^2}{2} + c$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(0,\infty)$ a pro všechna $d \in \mathbb{R}$ je $-\frac{x^2}{2} + d$ primitivní funkcí k $|x|$ na intervalu $(-\infty,0)$.

Protože funkce $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, existuje primitivní funkce k $|x|$ na $\mathbb{R}$.

Je-li F nějaká primitivní funkce k funkci $|x|$ na celém $\mathbb{R}$, pak $F(x) = \frac{x^2}{2} + c$ na intervalu $(0,\infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a $F(x) = -\frac{x^2}{2} + d$ na intervalu $(-\infty,0)$ pro nějaké $d \in \mathbb{R}$. Navíc, protože F má v každém bodě x intervalu $(-\infty,\infty)$ vlastní derivaci $|x|$, musí být F spojitá na $\mathbb{R}$. K tomu je nutnou a postačující podmínkou to, že platí

$$\lim_{x\to 0_-} F(x) = \lim_{x\to 0_+} F(x),$$

a tedy $c = d$. Funkce F je proto rovna funkci $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ na celém $\mathbb{R}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ a vzhledem k tomu, že všechny primitivní funkce na intervalu jsou určeny jednoznačně až na přičtení konstantní funkce, jsou funkce tvaru $(\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + c$ všemi primitivními funkcemi k $|x|$ na maximálním intervalu $(-\infty,\infty)$, tj.

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = (\operatorname{sgn} x)\frac{x^2}{2} + \mathbf{C} \text{ na } (-\infty,\infty).$$

■

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int |\sin x + \cos x|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Protože $\sin x + \cos x = \sin x + \sin(x + \frac{\pi}{2}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}$, platí $|\sin x + \cos x| = (-1)^k(\sin x + \cos x)$, pokud $x \in I_k = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo. Snadno nyní zjistíme, že funkce

$$F_k(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + c_k$$

je primitivní k funkci $|\sin x + \cos x|$ na intervalu I_k pro každé celé k a libovolné reálné c_k.

Uvažujme funkci F definovanou přepisem $F(x) = F_k(x)$ na každém I_k. Aby funkce F byla spojitá, musí platit

$$\lim_{x\to(\frac{3\pi}{4}+k\pi)_-} (-1)^k(-\cos x+\sin x)+c_k=\sqrt{2}+c_k=$$
$$=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4}+(k+1)\pi)_+} (-1)^{k+1}(-\cos x+\sin x)+c_{k+1}=-\sqrt{2}+c_{k+1}$$

pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Zvolíme tedy c_0 libovolné a $c_k = c_0 + 2k\sqrt{2}$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Tím je určena spojitá funkce F na $\mathbb{R}$. Protože derivace funkce F konverguje k hodnotě (spojité) funkce $|\sin x + \cos x|$ pro x blížící se hodnotě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ zleva i zprava pro všechna celá k, jsou podle věty o limitě derivací a jednostranných derivacích limita zleva i zprava funkce F' rovny derivaci F v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ a ta je rovna hodnotě funkce $|\sin x + \cos x|$ v bodě $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ pro všechna celá k. Proto je F primitivní funkcí k $|\sin x+\cos x|$ na celém $\mathbb{R}$. Přičtením libovolné konstanty můžeme docílit, že hodnota c_0 je libovolné reálné číslo.

Řešením tedy je, že

$$\int |\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x = F_0(x)+\mathbf{C},$$

kde $F_0(x) = (-1)^k(-\cos x + \sin x) + k2\sqrt{2}$ pro $x \in [-\frac{\pi}{4} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + (k + 1)\pi]$ pro všechna k celá. ∎

Všimněte si, že v prvním z předchozích dvou příkladů jsme použili explicitně tvrzení o existenci primitivní funkce ke spojité funkci [I1, Věta 49], kdežto ve druhém jsme se bez toho obešli. Použili jsme ovšem jiné tvrzení (o limitě derivace a jednostranné derivaci [DII, Věta 80]). V obou případech si můžete rozmyslet, jak by vypadalo užití druhého z obou možných postupů.

§3. Derivace součinu a metoda per partes. Není příliš časté, aby funkce byla zapsána ve tvaru derivace součinu dvou funkcí jako v následujícím příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int e^x(\sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int e^x(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x = \int\Big((e^x)'\sin x + e^x(\sin x)'\Big)\,\mathrm{d}x = e^x\sin x + \mathbf{C}$ na $\mathbb{R}$. ∎

Mnohem častěji je možné vyjádřit si zadanou funkci jako součin derivace jedné funkce s funkcí druhou, tedy jen jako část vzorce pro derivaci součinu. To nám umožní použít *metodu per partes*, která spočívá v následujícím pozorování.

Je-li $G'(x) = g(x)$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$, pak platí, že

$$\int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

na (a, b), pokud má pravá strana smysl.

Použití si nejprve předvedeme na velmi jednoduchém příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> *Spočtěte* $\int xe^x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Užijeme výše popsané tvrzení („metodu per partes“) při volbě $F(x) = x$ a $g(x) = e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dostaneme

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \, \mathrm{d}x = (x-1)e^x + \mathbf{C} \text{ na } \mathbb{R}.$$

■

Smysl volby F a g v předchozím příkladu byl v tom, že vedla k výpočtu podstatně jednoduššího integrálu. Je třeba získat cit pro to, jak užít metodu per partes tak, aby vedla ke zjednodušení úlohy. V následujícím příkladu si ukážeme poněkud odlišný případ založený na tom, že derivace logaritmu je racionální funkce.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int \log|1+x| \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Maximálními otevřenými intervaly obsaženými v definičním oboru funkce $\log|1+x|$ jsou intervaly $(-1, \infty)$ a $(-\infty, -1)$.

Položme $F(x) = \log|1+x|$ a $g(x) = 1$ na libovolném z obou intervalů. Užitím metody per partes dostáváme

$$\begin{aligned}\int \log|1+x| \, \mathrm{d}x &= x\log|1+x| - \int \frac{x}{1+x} \, \mathrm{d}x = \\ &= x\log|1+x| - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \mathrm{d}x = \\ &= x\log|1+x| - x + \log|1+x| + \mathbf{C} \quad \text{na intervalu } (-\infty, -1).\end{aligned}$$

Stejnou rovnost dostáváme též na intervalu $(-1, \infty)$.

Protože $(-1, \infty)$ a $(-\infty, -1)$ jsou maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce $\log|1+x|$, jsou tak popsány všechny primitivní funkce k funkci $\log|1+x|$. ■

Povšimněte si, že nepíšeme $\int \log|1+x| \, \mathrm{d}x = x\log|1+x| - x + \log|1+x| + \mathbf{C}$ na definičním oboru funkce $\log|1+x|$! Definičním oborem funkce $\log|1+x|$ není totiž interval, ale množina $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Na takovýchto množinách jsme primitivní funkci ani symbol $\mathbf{C}$ nedefinovali. Navíc, kdybychom je definovali analogicky, pak by uvedená rovnost neplatila.

Dále si ukážeme, jak může vést k nalezení primitivních funkcí vícenásobné použití metody per partes. V předminulém příkladu jsme využili mimo jiné toho, že derivací funkce x je konstantní funkce. Obecněji můžeme v řadě příkladů užít toho, že n-tá derivace polynomu n-tého stupně je konstantní. V následujícím příkladu bude podstatné zároveň, že primitivní funkce k funkcím $\cos x$ a $\sin x$ umíme počítat a použitím metody per partes se integrování postupně zjednodušuje.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int (x^3 + 3x - 2)\cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Nejprve použijeme metodu per partes na funkce $F(x) = x^3 + 3x - 2$ a $g(x) = \cos x$ definované na celém $\mathbb{R}$. Dostaneme, že

$$\int (x^3 + 3x - 2)\cos x \, \mathrm{d}x = (x^3 + 3x - 2)\sin x - \int (3x^2 + 3)\sin x \, \mathrm{d}x.$$

Dále užijeme metodu per partes na funkce $F(x) = 3x^2 + 3$ a $g(x) = \sin x$ a dostaneme, že

$$\int (3x^2 + 3)\sin x \, \mathrm{d}x = (3x^2 + 3)(-\cos x) - \int 6x(-\cos x)\, \mathrm{d}x.$$

Konečně užijeme metodu per partes s $F(x) = x$ a $g(x) = \cos x$, abychom dostali, že

$$\int x\cos x \, \mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x \, \mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + \mathbf{C}.$$

Celkem pak máme, že

$$\begin{aligned}
&\int (x^3 + 3x - 2)\cos x \, \mathrm{d}x = \\
&\qquad = (x^3 + 3x - 2)\sin x + (3x^2 + 3)\cos x - 6(x\sin x + \cos x) + \mathbf{C} = \\
&\qquad = (x^3 - 3x - 2)\sin x + 3(x^2 - 1)\cos x + \mathbf{C} \quad \text{na } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

■

Povšimněte si, jak jsme zacházeli se symbolem $+\mathbf{C}$, tj. s přičtením množiny všech konstantních funkcí na $\mathbb{R}$, a uvědomte si, proč to bylo korektní.

V některých případech není těžké odvodit pomocí opakovaného použití metody per partes vzorce matematickou indukcí.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int x^n e^x \, \mathrm{d}x$ pro všechna přirozená n.

Řešení. Položme $f_n(x) = x^n e^x$. Pomocí metody per partes dostaneme rovnost

$$\int f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - n \int f_{n-1}(x)\, \mathrm{d}x$$

na celém $\mathbb{R}$. Snadno pak odhadneme a indukcí dokážeme, že

$$\int x^n e^x \, \mathrm{d}x = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \cdots + (-1)^n n! e^x + \mathbf{C} \text{ na } \mathbb{R}.$$

■

Často vede vhodné použití metody per partes (obecně i několikrát opakované) nikoliv přímo k výpočtu primitivní funkce z jednodušší funkce, ale k rovnosti, ze které lze hledanou primitivní funkci spočítat.

P ř í k l a d Najděte všechny primitivní funkce k funkci $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Řešení. Užijeme metodu per partes na funkce $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a $g(x) = 1$. Dostaneme rovnost

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+x^2} \cdot 1 \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{1+x^2} \cdot x - \int \frac{-1}{(1+x^2)^2}(2x) \cdot x \, \mathrm{d}x = \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2 \operatorname{arctg} x - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Povšimněme si, že se na pravé straně objevila primitivní funkce, kterou chceme spočítat. Vyjádříme si ji tedy pomocí předchozí rovnosti, ve které dosadíme $\operatorname{arctg} x + \mathbf{C}$ za $\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$. Máme konečně, že

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) + \mathbf{C} \text{ na celém } \mathbb{R}.$$

■

V předchozím příkladu jsme tedy postupovali od jednoduššího integrálu, který známe, ke složitějšímu, abychom ten složitější posléze z obdržené rovnosti vyjádřili. Podobným postupem lze obecněji integrováním funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ vyjádřit $\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} \, \mathrm{d}x$ pomocí analogického integrálu s n namísto $n+1$. To dává rekurentní formuli pro posloupnost primitivních funkcí $\frac{1}{(1+x^2)^n}$. V následujícím příkladu půjde o nalezení rovnice, kterou musí primitivní funkce splňovat.

P ř í k l a d Spočtěte $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Pomocí dvojího použití metody per partes dostaneme postupně

$$\begin{aligned}&\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x (\cos x) \, \mathrm{d}x = \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x(-\sin x) \, \mathrm{d}x = e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Hledaný integrál je na obou stranách s opačným znaménkem. Dostaneme proto vyjádření

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + \mathbf{C} \text{ na } \mathbb{R}.$$

Zde si povšimněme, jak jsme pracovali s množinou $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$, která je tvaru $F(x) + \mathbf{C}$. Přičetli jsme ji k oběma stranám rovnice, a tak jsme dostali nalevo

$$(F(x) + \mathbf{C}) + (F(x) + \mathbf{C}) = 2F(x) + \mathbf{C}$$

a napravo

$$\begin{aligned}&e^x(\sin x - \cos x) - (F(x) + \mathbf{C}) + (F(x) + \mathbf{C}) = \\ &\quad = e^x(\sin x - \cos x) + (-F(x) + \mathbf{C}) + (F(x) + \mathbf{C}) = e^x(\sin x - \cos x) + \mathbf{C}).\end{aligned}$$

Na závěr jsme obě strany vynásobili jednou polovinou podle zavedené konvence. ■

§4. **Substituce.** Znalost věty o derivování složené funkce umožňuje použít jednu ze dvou forem vět o substituci. Připomeňme si, že formálně jde vždy o rovnost

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \int (g \circ f)(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

„První věta o substituci". Je-li G primitivní funkcí k funkci g na intervalu (A,B) a funkce $f\colon (a,b) \to (A,B)$ má vlastní derivaci v každém bodě intervalu (a,b), pak

$$\int (g \circ f)(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = G(f(x)) + \mathbf{C}$$

na intervalu (a,b).

Důsledkem uvedené věty je věta následující, kterou je, jak uvidíme v příkladech, užitečné zformulovat jako samostatné tvrzení.

„Druhá věta o substituci". Je-li funkce g spojitá na intervalu (A,B), funkce $f\colon (a,b) \to (A,B)$ je bijekcí[1] s vlastní derivací na intervalu (a,b) a H je primitivní funkcí k funkci $(g \circ f) \cdot f'$ na intervalu (a,b), pak

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = H(f^{-1}(y)) + \mathbf{C}$$

na intervalu (A,B).

Poznámka. V předchozí větě je možné předpoklad, že f je prostá na intervalu (a,b), nahradit předpokladem existence funkce h na intervalu (A,B) splňující rovnost $f(h(y)) = y$ pro $y \in (A,B)$ (viz [I1, Věta 53]). Užití takto zobecněné věty může být někdy pohodlnější, avšak v takovém případě lze vždy použít i druhou větu o substituci pro f zúžené na interval $h((A,B))$.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Uvažujme funkce $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$ definovanou pro $y \in \mathbb{R}$ a $f(x) = \sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Funkce g má primitivní funkci $\operatorname{arctg} y$ na $\mathbb{R}$. Dále platí, že $f'(x) = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int (g \circ f)(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(f(x)) + \mathbf{C} = \operatorname{arctg}(\sin x) + \mathbf{C}$$

[1] Jinými slovy, f je prostým zobrazením intervalu (a,b) na interval (A,B).

na $\mathbb{R}$. ■

První větu o substituci můžeme použít i v řadě případů, kdy se tak zjevně nenabízí jako v předchozím příkladu.

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Maximálními otevřenými intervaly v definičním oboru jsou interval $(0,1)$ a interval $(1,\infty)$. Uvážíme, že $\frac{1}{1-\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a že $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Položíme $g(y) = \frac{2y}{1-y}$ pro $y \in (0,1)$, nebo např. také pro $y \in (-\infty,1)$, a $f(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in (0,1)$.

Stejně můžeme postupovat též pro $y \in (1,\infty)$ a $x \in (1,\infty)$. Pro oba případy proto postupujme dále společně.

Pak na tyto funkce užijeme první větu o substituci a dostaneme, že

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2y}{1-y}\,\mathrm{d}y.$$

Posledním výrazem se ovšem rozumí primitivní funkce složená s funkcí $f(x) = \sqrt{x}$. Jde o konvenci, která vychází z toho, že v tuto chvíli víme, že funkci proměnné y napravo je třeba složit s funkcí f, abychom dostali skutečnou rovnost.

Výpočet zakončíme často používaným „trikem“.

$$\begin{aligned}\int \frac{2y}{1-y}\,\mathrm{d}y &= -2\int \frac{1-y-1}{1-y}\,\mathrm{d}y = \\ &= -2\int 1\,\mathrm{d}y + 2\int \frac{1}{1-y}\,\mathrm{d}y = -2y - 2\log|1-y| + \mathbf{C}.\end{aligned}$$

Po dosazení $f(x)$ za y dostáváme

$$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{x} - 2\log|1-\sqrt{x}| + \mathbf{C}$$

na intervalu $(0,1)$ (resp. $(1,\infty)$). ■

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y$.

Řešení. Použijeme druhou větu o substituci na funkci $f(x) = 2\sin x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Máme $f'(x) = 2\cos x \neq 0$ na $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ a f je bijekce intervalu $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ na interval $(-2,2)$. Předpoklady věty jsou tedy splněny, a máme, že

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y &= \int \left(\sqrt{4-4\sin^2 x}\right) 2\cos x\,\mathrm{d}x = 4\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \\ &= 4\int \frac{1+\cos 2x}{2} = 2x + \sin 2x + \mathbf{C} = 2\arcsin\frac{y}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

na intervalu $(-2,2)$. V poslední rovnosti jsme užili toho, že $f^{-1}(y) = \arcsin \frac{y}{2}$ pro $y \in (-2,2)$ (mimo dalších dobře známých vlastností goniometrických funkcí). ■

Poznámka. Při použití věty o substituci se často používá symbolického zápisu, který si předvedeme tím, že přepíšeme řešení předchozího příkladu s jeho pomocí. Uvažujeme substituci $y = 2\sin x (= f(x))$ na $\mathbb{R}$. Symbol $\mathrm{d}y$ bude zaměněn výrazem $f'(x)\,\mathrm{d}x = 2\cos x\,\mathrm{d}x$. Dosadíme za y i $\mathrm{d}y$ do vyšetřovaného neurčitého integrálu:

$$\int \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y = \int \sqrt{4-(2\cos x)^2} \cdot 2\cos x\,\mathrm{d}x = 2x + \sin 2x + \mathbf{C}$$

pro y z intervalu $(-2,2)$, neboť pro $y \in (-2,2)$ existuje jediné x splňující $f(x) = y$, totiž $x = \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) = h(y)$. Spojitá prostá funkce h tedy zobrazuje interval $(-2,2)$ na nějaký otevřený interval I ($I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). Můžeme proto za x dosadit $\arcsin \frac{y}{2}$ na pravé straně rovnosti a dostáváme stejný výsledek jako v předchozím příkladu.

Všimněte si, že jsme vlastně uvedeným postupem ověřili všechny předpoklady druhé věty o substituci (zúžení f na $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je prosté). Můžeme se ale též odvolat na silnější verzi, o které jsme se zmínili v poznámce za druhou větou o substituci, protože $(f \circ h)(y) = y$ pro $y \in (-2,2)$.

Na jednoduchém příkladu si ještě předvedeme použití téže symboliky při aplikaci první věty o substituci:

Spočteme $\int \sqrt{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Funkce je spojitá na maximálních intervalech $I_k = (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$ provedeme substituci $y = \operatorname{tg} x (= f(x) > 0)$ na I_k. „Platí $\mathrm{d}y = \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$“, a tedy na I_k existuje vlastní derivace f'. Dosazením dostáváme

$$\int \sqrt{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3} y^{3/2} + \mathbf{C} = \frac{2}{3} \operatorname{tg} x^{3/2} + \mathbf{C}.$$

Jak jsme již poznamenali, f' je vlastní na I_k. Zároveň jsme též vlastně již ověřili, že $f(I_k) \subset (A,B) = (0,\infty)$, i to, že k funkci $g(y) = \sqrt{y}$ existuje na (A,B) primitivní funkce. Použití první věty o substituci bylo tedy oprávněné.

Vzhledem k tomu, že ověření předpokladů věty o substituci je při použití předchozího postupu spíše implicitní, doporučujeme především osvojit si metodu použití věty tak, jak byla vyložena v předchozím textu, abyste byli schopni i při použití symboliky se záměnou $\mathrm{d}y$ a $f'(x)\,\mathrm{d}x$ vysvětlit, proč je postup korektní. To je důvod, proč jsme se o tomto postupu zmínili až v závěrečné poznámce. Na cvičeních a u zkoušek se samozřejmě řiďte požadavky Vašich učitelů.

V následujících odstavcích si předvedeme na několika příkladech postupy, které lze použít k hledání primitivních funkcí pro velké skupiny funkcí jistého typu. Tím není řečeno, že uvedené metody jsou v každém případě pro konkrétní funkci nejvhodnější, a už vůbec ne jediné možné. Doporučujeme je ovládat, ale vždy důkladně zvážit, zda v daném případě není jiný postup vhodnější. Několik takových méně universálních, ale někdy podstatně vhodnějších možností uvádíme (srovnejte například předchozí příklad s metodami §7).

§5. Racionální funkce. Univerzální metoda je založena na *rozkladu reálné racionální funkce na parciální zlomky*, tj. zápisu funkce ve tvaru součtu polynomu a zlomků, které jsou jednoho z následujících dvou typů:

$$\frac{a}{(x-x_0)^n}, \quad \frac{bx+c}{[(x-x_1)(x-\overline{x_1})]^n} = \frac{bx+c}{(x^2+dx+e)^n},$$

kde $a, b, c, d, e, x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. U posledního zlomku je podstatné, že kvadratický trojčlen ve jmenovateli nelze dále rozložit na součin reálných polynomů prvního stupně, a tedy že diskriminant je záporný. Přesné tvrzení o takovém rozkladu i s důkazem jeho existence (případně jednoznačnosti při silnější formulaci) najdete v [I1, Kap.IV, 2]. V dalším si metodu, či spíše několik obratů vedoucích k nalezení primitivní funkce ke všem z uvedených typů zlomků, ukážeme na konkrétním příkladu. Primitivní funkce k racionálním funkcím budeme hledat ještě několikrát jako část řešení jiné úlohy.

P ř í k l a d Najděte všechny primitivní funkce k funkci

$$r(x) = x + 1 + \frac{3}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^3} + \frac{x+2}{x^2+2x+3} + \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Řešení. Funkce je definována na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, neboť $x \neq \frac{1}{2}$ je nutná a postačující podmínka k tomu, aby první dva zlomky byly definovány, a zbylé dva zlomky jsou definovány dokonce na celém $\mathbb{R}$, neboť diskriminant kvadratického trojčlenu $x^2 + 2x + 3$ je -8, což je záporné číslo.

Budeme hledat primitivní funkci ke každému ze sčítanců zvlášť, a to na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ i na intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$ zároveň. Dostáváme, že na každém z uvedených intervalů platí

$$\int (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + \mathbf{C};$$

$$\int \frac{3}{2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\log|2x-1| + \mathbf{C}; \text{ zde jsme užili substituci } f(x) = 2x-1;$$

$$\int \frac{1}{(2x-1)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{(2x-1)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\frac{1}{(2x-1)^2} + \mathbf{C}\ ;$$

opět jsme použili substituci $f(x) = 2x-1$;

předposlední zlomek upravíme nejprve tak, abychom aspoň na „jeho část“ mohli použít substituci $f(x) = x^2 + 2x + 3$:

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \mathbf{C}$$

s použitím lineární substituce $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$ na druhý integrál.

Integrování posledního zlomku lze provést užitím metody per partes způsobem, který jsme si předvedli v jednom z příkladů §3. (Podobně lze opakovaně postupovat v případě, že mocnina ve jmenovateli je vyšší než druhá.) S užitím lineární substituce $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$ tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{x+1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) + \mathbf{C}.\end{aligned}$$

Celkově jsme zjistili, že na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$, resp. na intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$, je

$$\begin{aligned}\int r(x)\,\mathrm{d}x =& \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{4}\frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{x+1}{x^2+2x+3} + \\ &+ \log\sqrt{|2x-1|^3(x^2+2x+3)} + \frac{5}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \mathbf{C}.\end{aligned}$$

■

Poznámka. Obvykle bývá racionální funkce zadána ve tvaru podílu dvou polynomů. V předchozím příkladu jde o funkci

$$r(x) = \frac{8x^8 + 28x^7 + 78x^6 + 93x^5 + 73x^4 - 27x^3 - 46x^2 + 8x + 20}{8x^7 + 20x^6 + 38x^5 - x^4 - 16x^3 - 46x^2 + 42x - 9}.$$

Dojít k tomuto závěru od původního zadání roznásobením je jednoduché, i když pracné. Opačný postup je složitější. Prvním krokem je obvykle rozklad na polynom a racionální funkci s polynomem nižšího stupně v čitateli než ve jmenovateli. K tomu nejčastěji používáme algoritmu dělení dvou polynomů se zbytkem, který jistě znáte ze střední školy. V našem případě dostáváme

$$r(x) = x + 1 + \frac{20x^6 + 56x^5 + 90x^4 + 35x^3 - 42x^2 - 25x + 29}{8x^7 + 20x^6 + 38x^5 - x^4 - 16x^3 - 46x^2 + 42x - 9}.$$

Nejobtížnější je najít kořeny polynomu ve jmenovateli. Pro to neexistuje obecný algoritmus. Obvykle si pamatujeme postup u polynomů nejvýše druhého stupně. Pokud se nám to podaří a zjistíme násobnosti kořenů, tak nám to dává návod, v jakém tvaru hledat parciální zlomky. V našem případě je polynom ve jmenovateli roven

$$(2x-1)^3(x^2+2x+3)^2,$$

přičemž druhý z polynomů na reálné polynomy prvního stupně nelze rozložit, protože nemá reálný kořen. Hledáme proto reálné koeficienty $a_1, \dots, a_7$ tak, aby platilo

$$r(x) - (x+1) = \frac{a_1}{2x-1} + \frac{a_2}{(2x-1)^2} + \frac{a_3}{(2x-1)^3} + \frac{a_4 x + a_5}{x^2+2x+3} + \frac{a_6 x + a_7}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Po rozšíření polynomem $(2x-1)^3(x^2+2x+3)^2$ dostaneme rovnost polynomů nejvýš šestého stupně. Protože odpovídající koeficienty na obou stranách se musí rovnat, dostáváme sedm rovnic pro koeficienty $a_1, \dots, a_7$. Lze ukázat, že tento postup vede vždy k cíli.

Pro jasnější představu si to předvedeme na jednodušším příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte všechny primitivní funkce k racionální funkci

$$r(x) = \frac{2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 10x + 6}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}.$$

Řešení. Povšimneme si („uhodneme“) nejprve, že -1 je kořenem polynomu ve jmenovateli, dokonce dvojnásobným:

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^3 + x^2 + x + 1) = (x+1)^2(x^2+1).$$

Z toho vidíme jednak to, že maximálními intervaly, na kterých existují primitivní funkce ke spojité funkci r, jsou $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$, a zároveň to, že r je možno rozložit následujícím způsobem:

$$r(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{dx+e}{x^2+1}.$$

(Obvyklejší je ovšem začít dělením polynomů se zbytkem, čímž dostaneme okamžitě hodnotu a. Zde předvedeme, že je možné uvažovat i jinak.) Po vynásobení polynomem ve jmenovateli $r(x)$ dostáváme

$$\begin{aligned} 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 10x + 6 &= \\ &= a(x+1)^2(x^2+1) + b(x+1)(x^2+1) + c(x^2+1) + (dx+e)(x+1)^2 = \\ &= ax^4 + (2a+b+d)x^3 + (2a+b+c+2d+e)x^2 + \\ &\qquad\qquad + (2a+b+d+2e)x + (a+b+c+e). \end{aligned}$$

Řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ 2a+b+d &= 4 \\ 2a+b+c+2d+e &= 8 \\ 2a+b+d+2e &= 10 \\ a+b+c+e &= 6 \end{aligned}$$

snadno dostáváme (např. metodou eliminace), že

$$a = 2, e = 3, b = d = 0, c = 1.$$

Konečně tedy máme

$$\int r(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(2 + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = 2x - \frac{1}{x+1} + 3 \operatorname{arctg} x + \mathbf{C},$$

a to jak na intervalu $(-\infty, -1)$, tak na intervalu $(-1, \infty)$. ■

Pro informaci uvádíme tři poznámky o možnostech odlišného postupu při hledání primitivní funkce k racionální funkci. Bližší informace o nich může zájemce (v případě třetí poznámky též znalec ruského jazyka) nalézt v citované literatuře.

Poznámka. Předvedený postup rozkladu na parciální zlomky lze kombinovat s dosazováním kořenů do rovnosti polynomů. V předchozím příkladu šlo postupně dosazovat $x = -1$, $x = i$ nebo $x = -i$. Například dosazení $x = -1$ dává $2 = 2c$, čili $c = 1$. Po dosazení $x = i$ (nebo $x = -i$) můžeme spočítat koeficienty d a e. Takto lze snížit počet neznámých. Všimněte si, že koeficient a je limita funkce $r(x)$ v $+\infty$, a tedy je roven 2. Zůstane jedna neznámá b, kterou uvedeným postupem nespočítáme.

Poznámka. Každou reálnou racionální funkci lze rozložit na součet polynomu s reálnými koeficienty a zlomků tvaru $\frac{a}{(x-c)^k}$, kde $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, ale c je komplexní, ne nutně reálné, číslo. K hledání primitivních funkcí touto cestou bychom ovšem potřebovali znát něco z teorie komplexních funkcí.

Poznámka. V případě, že se ve jmenovateli objevuje polynom q s vícenásobnými kořeny, lze se k jeho rozkladu dopracovat také tak, že nejprve najdeme největšího společného dělitele polynomů q a jeho derivace q'. Ten má za kořeny právě všechny vícenásobné kořeny polynomu q. Nalézt ho můžeme postupným dělením se zbytkem - příslušný Euklidův algoritmus lze nalézt např. v [R, str. 52]. To nám někdy umožní redukovat nutnost hledání kořenů polynomu na polynom nižšího stupně. Navíc existuje metoda (tzv. Ostrogradského metoda, viz např. [FII, oddíl 276]), která dává možnost postupovat po nalezení největšího společného dělitele q a q' rychleji.

Na závěr této části předvedeme jiný možný postup hledání primitivních funkcí k funkcím tvaru $\frac{1}{(1+x^2)^k}$, $k \in \mathbb{N}$, než jaký jsme popsali v odstavci o metodě per partes.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Použijeme druhou substituční větu s funkcí $f(y) = \operatorname{tg} y$ zobrazující interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na $\mathbb{R}$ (ověřte předpoklady zmíněné věty). Dostáváme

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 y)^2}\frac{1}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y = \int \cos^2 y\,\mathrm{d}y = \int \frac{1+\cos 2y}{2}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\left(y + \frac{\sin 2y}{2}\right) + \mathbf{C} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\sin(2\operatorname{arctg} x)}{2}\right) + \mathbf{C} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) + \mathbf{C} \text{ na } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme použili rovnosti

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2\operatorname{arctg} x)}{2} &= \sin(\operatorname{arctg} x)\cdot\cos(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cdot\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \\ &= x\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{x}{1+x^2}.\end{aligned}$$

■

Analogicky převedeme výpočet $\int \frac{1}{(1+x^2)^k}\,\mathrm{d}x$ na výpočet primitivních funkcí k $\cos^{2k-2} x$.

§6. Funkce tvaru $R(\sin x, \cos x)$**.** V tomto odstavci ukážeme několik metod k hledání primitivních funkcí k funkcím tvaru $R(\sin x, \cos x)$, kde R je racionální funkce dvou proměnných, tj. funkce tvaru

$$R(u,v) = \left(\sum_{i,j=0}^{m} a_{ij}u^i v^j\right) \Bigg/ \left(\sum_{i,j=0}^{n} b_{ij}u^i v^j\right),$$

kde polynom ve jmenovateli je nenulový.

P ř í k l a d Najděte všechny primitivní funkce k funkci $h(x) = \frac{1}{\sin^3 x\cos x}$.

Řešení. Maximální (otevřené) intervaly definičního oboru funkce h jsou intervaly $\left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Na nich je funkce spojitá, tedy jde též o maximální intervaly, na kterých existuje primitivní funkce k h.

Jednoduchá úprava nám umožní přímočaré použití 1. substituční věty (postupujeme opět na všech maximálních intervalech definičního oboru zároveň):

$$h(x) = \frac{\sin' x}{\sin^3 x\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}\sin' x.$$

Užitím substituce $f(x) = \sin x$ na každém z uvedených intervalů (pak $h(x) = (g\circ f)(x)\ f'(x)$, kde $g(y) = \frac{1}{y^3(1-y^2)}$) dostaneme, že

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^3(1-y^2)}\,\mathrm{d}y.$$

Nyní si zopakujte postup rozkladu racionální funkce na parciální zlomky. Po krátkém výpočtu vyjde

$$\frac{1}{y^3(1-y^2)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right).$$

Závěrem tedy dostáváme

$$\begin{aligned}\int h(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + \int \frac{1}{y^3}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \\ &= \log|y| - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2}\log(1-y)(1+y) + \mathbf{C} = \\ &= \log|\sin x| - \frac{1}{2\sin^2 x} - \log\sqrt{1-\sin^2 x} + \mathbf{C} \\ &= \log|\sin x| - \frac{1}{2\sin^2 x} - \log|\cos x| + \mathbf{C} \\ &= \log|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

na každém z intervalů $\left(k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{N}$. ■

Podobně převedeme hledání primitivní funkce na případ racionální funkce, tentokrát polynomu, v následujícím příkladu.

Příklad Spočtěte $\int \sin^7 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Po úpravě $\sin^7 x = (\cos^2 x - 1)^3 \cos' x$ je patrné, že můžeme užít substituce $f(x) = \cos x$. Dostáváme, že

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x\,\mathrm{d}x &= \int (y^2-1)^3\,\mathrm{d}y = \frac{y^7}{7} - \frac{3y^5}{5} + \frac{3y^3}{3} - y + \mathbf{C} = \\ &= \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{3\cos^5 x}{5} + \cos^3 x - \cos x + \mathbf{C} \quad \text{na } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

■

Předchozí dvě úlohy jsou příklady aplikace obecnější poučky.

Pokud je $R(-u,v) = -R(u,v)$, lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ vyjádřit ve tvaru $Q(\cos x)\cdot(-\sin x)$, kde Q je racionální funkce. Substitucí „$y = \cos x$“ tedy úlohu převedeme na hledání primitivní funkce k této racionální funkci Q. Podobně, pokud je $R(u,-v) = -R(u,v)$, lze $R(\sin x, \cos x)$ vyjádřit ve tvaru $Q(\sin x)\cdot\cos x$, a tedy je možno použít substituci „$y = \sin x$“.

Příklad Najděte všechny primitivní funkce k funkci $h(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

Řešení. Povšimněme si nejprve, že na definičním oboru funkce tg platí

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Snadnou úpravou tedy dostáváme, že

$$h(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \operatorname{tg}' x$$

pro ta x, pro která má pravá strana smysl.

Zatímco funkce h je spojitá na maximálních intervalech svého definičního oboru, kterými jsou intervaly $(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, zvolená substituce $f(x) = \operatorname{tg} x$ splňuje předpoklady 1. věty o substituci jen na intervalech $I_k = (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, $J_k^- = (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ a $J_k^+ = (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Substitucí $f(x) = \operatorname{tg} x$ a rozkladem na parciální zlomky dostáváme na uvedených intervalech, že

$$\begin{aligned}
&\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{y^2}{(1-y^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-y}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-y}{1+y}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y + \mathbf{C} = \\
&= \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right| - \frac{1}{2}\left(x - \left[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right]\pi\right) + \mathbf{C} = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right| - \frac{1}{2}x + \mathbf{C}.
\end{aligned}$$

Tím jsme popsali všechny primitivní funkce k funkci h na intervalech I_k, J_k^- a J_k^+, $k \in \mathbb{Z}$. Funkce h je ovšem definována a spojitá na intervalech $J_k = J_k^- \cup \{\frac{\pi}{2} + k\pi\} \cup J_k^+$. Proto na každém z intervalů J_k existuje primitivní funkce. Každá taková primitivní funkce je spojitou funkcí, která je rovna $H_k^-(x) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right| - \frac{1}{2}x + c_k^-$ na intervalu J_k^- a $H_k^+(x) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right| - \frac{1}{2}x + c_k^+$ na intervalu J_k^+, kde $c_k^-, c_k^+ \in \mathbb{R}$. Protože

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)_-} H_k^-(x) = -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + k\pi) + c_k^-$$

a

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{2}+k\pi)_+} H_k^+(x) = -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + k\pi) + c_k^+,$$

jsou všechny primitivní funkce k h tvaru $H(x) + \mathbf{C}$, kde

$$H(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\log\left|\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}\right| - \frac{1}{2}x, & \text{má-li pravá strana smysl,} \\ -\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + k\pi) & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

a to na maximálních intervalech $(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

Poznámka. Mohli jsme se též vyhnout rozkládání intervalu J_k na intervaly J_k^-, J_k^+ a bod $\frac{\pi}{2} + k\pi$, kdybychom pro interval J_k užili substituci $\operatorname{cotg} x$. Doporučujeme rozmyslet si to podrobně.

Předchozí příklad s poznámkou jsou ilustrací následující obecnější poučky.

Pokud je $R(u,v) = R(-u,-v)$, lze funkci $R(\sin x, \cos x)$ vyjádřit ve tvaru $Q(\operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ (s výjimkou bodů, v nichž funkce tg *není definována) a také ve tvaru $S(\operatorname{cotg} x) \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}$ (s výjimkou bodů, v nichž funkce* cotg *není definována), kde Q a S jsou racionální funkce. Substitucí „$y = \operatorname{tg} x$“ či „$y = \operatorname{cotg} x$“ lze tedy převést úlohu hledání primitivní funkce k funkci $R(\sin x, \cos x)$ na hledání primitivní funkce k funkci racionální.*

Protože tyto substituce mohou být aplikovány jen na intervalech definičního oboru funkcí $\operatorname{tg} x$ nebo $\operatorname{cotg} x$, může tento postup vyžadovat dodatečné „lepení“. Vhodnou volbou substituce se mu lze někdy vyhnout.

Následující poučka popisuje substituci, která je univerzálně použitelná pro všechny funkce typu „$R(\sin x, \cos x)$“.

Užití substituce „$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$“ či „$y = \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$“ vede vždy k hledání primitivních funkcí k racionálním funkcím na intervalech, kde lze aplikovat substituční větu.

Rozmyslete si, v čem by byla v předchozích příkladech aplikace těchto substitucí komplikovanější. Doporučujeme si to cvičně provést.

My budeme použití právě uvedených substitucí demonstrovat na vhodnějším příkladu.

P ř í k l a d Najděte všechny primitivní funkce k funkci $h(x) = \frac{1}{\sin x + 2}$.

Řešení. Protože funkce není ve tvaru vhodném k aplikaci substitucí „$y = \sin x$“, „$y = \cos x$“, „$y = \operatorname{tg} x$“ ani „$y = \operatorname{cotg} x$“, budeme aplikovat substituci „$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$“.

Povšimněme si už nyní, že h je spojitá na $\mathbb{R}$, takže k nalezení primitivní funkce na $\mathbb{R}$ zvolenou metodou bude jistě na závěr zapotřebí (nekonečně mnoha) lepení.

Je $h(x) = \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin x + 2} (\operatorname{tg} \frac{x}{2})'$ na intervalech $I_k = (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Abychom vyjádřili h v potřebném tvaru pro použití 1. substituční věty s $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ uvážíme, že

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$$

a

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}$$

na I_k. Po dosazení dostaneme

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y+y^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}y}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} z + \mathbf{C} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right) + \mathbf{C} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + \mathbf{C}$$

na intervalu I_k pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Každá primitivní funkce H k funkci h na $\mathbb{R}$ je tedy rovna $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + c_k$ na I_k. Protože je spojitá na $\mathbb{R}$ a platí rovnosti

$$\lim_{x\to(\pi+2k\pi)_-} H(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_k \text{ a } \lim_{x\to(\pi+2k\pi)_+} H(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_{k+1},$$

musí platit $c_{k+1} = c_k + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Zvolíme-li např. c_0 libovolně, je H určena jednoznačně.

Konečně tedy máme, že všechny primitivní funkce k h na $\mathbb{R}$ jsou tvaru

$$H(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) + c_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$$

pro $x \in (-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ a $H(\pi+2k\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + c_0 + \frac{2k\pi}{\sqrt{3}}$, kde $c_0 \in \mathbb{R}$. ■

Poznámka. Pro řešení předchozího příkladu jsme mohli též užít 2. větu o substituci se substitucí „$x = 2\operatorname{arctg} y$“ pro $y \in (-\infty, \infty)$, která odpovídá v jistém smyslu právě užité substituci „$\operatorname{tg}\frac{x}{2}$“. Tím bychom našli primitivní funkci H_0 k zadané funkci h na intervalu $(-\pi, \pi)$. Vzhledem k tomu, že h je 2π-periodická, můžeme pak na intervalech $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ uvažovat funkce $H_k(x) = H_0(x-2k\pi)+c_k$ pro $k \in \mathbb{Z}$, které mají na příslušných intervalech zřejmě derivaci rovnou h. Pak už můžeme postupovat jako v předchozím a spojitým dodefinováním H v krajních bodech intervalů (tedy metodou „lepení“) najít primitivní funkci H k h na celém $\mathbb{R}$.

Úvahu o periodičnosti lze ovšem užít častěji. V řešení předchozího příkladu jsme též mohli užít 1. větu o substituci na substituci „$y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$“ jen na intervalu $(-\pi, \pi)$ a využít periodičnosti tak, jak bylo právě naznačeno.

§7. Další často používané substituce. Domníváme se, že v předchozích odstavcích jsme předvedli všechny podstatné metody užívané při řešení úloh na hledání primitivních funkcí. Nevyčerpali jsme ovšem zdaleka všechny příklady důležitých substitucí, které je třeba ovládat. Zmíníme se nyní již jen stručně o některých z nich. Doporučujeme najít příslušné primitivní funkce v následujících příkladech, ve kterých předvedeme jen část celého postupu.

<u>Příklad</u> Převeďte hledání primitivní funkce $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ na hledání primitivní funkce k racionální funkci.

Řešení. Užití substituce „$y=\sqrt{x+1}$“ na maximálních otevřených intervalech definičního oboru, tj. na intervalech $(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ a $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$, vede k rovnosti

$$\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{y^2-1+y}{y^2-1-y}\,2y\,\mathrm{d}y.$$

■

Předchozí příklad je ukázkou aplikace následujícího faktu.

Pokud $R(u,v)$ je racionální funkce dvou proměnných, $p>0$ a $ad\neq bc$, pak užití substituce $y=\sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ na výpočet $\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ vede na hledání primitivní funkce k racionální funkci.

To si ukážeme též v následujícím důležitém příkladu, který ukazuje jednu možnost, jak řešit úlohy pro funkce typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ v případě, že kvadratický trojčlen má dva různé reálné kořeny.

<u>Příklad</u> Převeďte hledání primitivní funkce $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ na hledání primitivní funkce k racionální funkci.

Řešení. Funkce je definována na maximálním otevřeném intervalu $(-1,1)$. Upravíme ji například takto:

$$x\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}(1+x).$$

Uvědomíme-li si, že „užití substituce $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$“ odpovídá užití druhé substituční věty pro substituci $x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$ pro $y>0$, dostaneme, že

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-y^2}{1+y^2}\,y\left(1+\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)\frac{-4y}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y \quad \text{na intervalu } (-1,1).$$

■

Pro hledání primitivních funkcí k funkci typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ s $a>0$, kde uvedený kvadratický trojčlen nemá reálný kořen (nebo také, má-li dva různé reálné kořeny), lze užít „substituci popsanou vztahem $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+y$“ k převedení úlohy na hledání primitivní funkce z racionální funkce.

Můžeme opět postupovat podle 1. nebo 2. substituční věty. Ukážeme to na jednom příkladu.

<u>Příklad</u> Převeďte výpočet $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$ na hledání primitivní funkce k racionální funkci.

Řešení. Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$. Uvažujme rovnost $\sqrt{4x^2 - x + 1} = 2x + y$. Tím je popsáno y jako hodnota spojité funkce $f(x) = \sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x$ definované na intervalu $(-\infty, \infty)$. Ta zobrazuje $\mathbb{R}$ na nějaký otevřený interval I. Po umocnění obou stran rovnosti dostaneme, že $x = \frac{1-y^2}{1+4y}$ (povšimněte si, že $y = -\frac{1}{4}$ nemůže nastat), a tedy f je prostá funkce z $\mathbb{R}$ na I. Výpočtem dostáváme, že $(f^{-1})'(y) = \frac{-4y^2-2y-4}{(1+4y)^2}$ je vlastní na I. Užitím druhé věty o substituci (f^{-1} je prostá na I) dostáváme, že

$$\int \frac{x}{\sqrt{4x^2 - x + 1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-y^2}{1+4y} \frac{1}{y + 2\frac{1-y^2}{1+4y}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2(y^2-1)(2y^2+y+2)}{(4y+1)^2(3+4y-2y^2)}\,\mathrm{d}y.$$

Povšimněte si, že jsme nijak nepotřebovali vědět, že interval I je roven $(-\infty, -\frac{1}{4})$, o čemž se můžete, ale nemusíte, přesvědčit. ■

2. Výpočet určitého integrálu

§8. **Použití definice.** Určitým integrálem rozumíme zobecněný Riemannův integrál ve smyslu [I1, Kapitola VIII, §3]. Integrál funkce f od a do b značíme $\int_a^b f$, případně $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Poznamenejme, že tento integrál se definuje ve třech krocích – nejprve se v [I1, Kapitola II] zavádí Riemannův integrál, poté ve dvou krocích zobecněný Riemannův integrál ([I1, Kapitola VIII, §2 a §3]). Nejčastěji vystačíme s integrálem funkce spojité na otevřeném intervalu, který se definuje vzorcem

$$\int_a^b f = \lim_{u \to a_+} \lim_{v \to b_-} \int_u^v f,$$

je-li limita na pravé straně vlastní a integrál na pravé straně je Riemannův.

První možností, jak integrál spočítat, je použít definici Riemannova integrálu (viz [I1, Kapitola II]), pokud tento existuje.

<u>P ř í k l a d</u> $\int_0^2 7 = 14$.
Je snadné se přesvědčit, že pro každé dělení intervalu $[0, 2]$ je horní i dolní součet roven 14, a tedy je (Riemannův) integrál roven 14 přímo podle definice.

§9. V několika příkladech se setkáme s funkcemi, které jsou spojité s výjimkou konečně mnoha bodů. Pak je možné využít faktu, že určitý integrál (Riemannův i zobecněný Riemannův) je **aditivní funkcí intervalu**.

Nechť $a < b < c$ jsou reálná čísla. Pak $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$, pokud má jedna strana smysl.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Z definice Riemannova integrálu snadno plyne, že $\int_{-1}^{0} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = -1$ a $\int_0^2 \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = 2$, tedy dle uvedené věty máme $\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = -1 + 2 = 1$. ■

§10. Přímo z definice však stěží budeme počítat integrály mnoha dalších (nekonstantních) funkcí. Ne snad, že by to nebylo možné, postup by však byl zbytečně zdlouhavý. Určité usnadnění poskytuje následující věta (viz [I1, Věty 22 a 37]).

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Zvolme libovolnou posloupnost dělení

$$D_n \colon a = x_0^n < x_1^n < \cdots < x_{p_n}^n = b$$

intervalu $[a, b]$ takových, že posloupnost jejich norem (připomeňme, že norma dělení je délka jeho nejdelšího intervalu) má limitu 0. Dále zvolme libovolně $\xi_i^n \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ (pro $i = 1, \ldots, p_n$, $n \in \mathbb{N}$). Pak

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i^n)(x_i^n - x_{i-1}^n),$$

kde integrál na levé straně je Riemannův.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. Za dělení D_n zvolme dělení

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1$$

a položme $\xi_i^n = i/n$, $i = 1, \ldots, n$. Pak

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

■

Podobně bychom mohli počítat například $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ nebo $\int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x$. Ale i zde je paleta funkcí, pro něž lze tuto metodu snadno použít, dosti omezená – úspěšnost závisí na naší schopnosti nějak jednoduše odhadnout součet ve vzorci se vyskytující.

§11. Použití primitivní funkce. Základní a nejužívanější metoda výpočtu určitého integrálu je založena na následující větě.

Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a,b) a F je funkce primitivní k f. Pak

$$\int_a^b f = (\lim_{x\to b-} F(x)) - (\lim_{x\to a+} F(x)),$$

pokud aspoň jedna strana je reálným číslem.

Na levé straně je ovšem zobecněný Riemannův integrál (pro Riemannův integrál tato věta neplatí – stejně jako většina dále uvedených vět). Ten je reálným číslem, kdykoli je definován. Výraz na pravé straně je reálným číslem, jestliže obě limity existují a jsou vlastní. Říká se mu zobecněný přírůstek funkce F na intervalu (a,b) a značí se symbolem $[F]_a^b$, případně $[F(x)]_a^b$. Poznamenejme, že výraz na pravé straně slouží rovněž jako definice Newtonova integrálu (který je ovšem definován i pro jiné funkce než spojité, totiž pro ty, které mají primitivní funkci, jejíž zobecněný přírůstek je reálným číslem – viz např. [LM, oddíl 7.1]).

Použití této metody tedy spočívá v tom, že nejprve spočteme primitivní funkci – s možným využitím všech postupů uvedených v kapitole o primitivních funkcích – a pak spočteme její (zobecněný) přírůstek.

Poznámka. Použití věty z počátku paragrafu lze kombinovat s tvrzením z §9. Tak můžeme pomocí primitivních funkcí počítat (zobecněný Riemannův) integrál z funkcí po částech spojitých. Například

$$\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x + \int_0^2 \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x = [-x]_{-1}^0 + [x]_0^2 = 1.$$

<u>P ř í k l a d</u> $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 1 - (-1) = 2.$

<u>P ř í k l a d</u> $\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x$ neexistuje, protože primitivní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $-\cos x$, a ta nemá limitu v $+\infty$. Pravá strana ve vzorci ve větě z úvodu paragrafu tedy nemá smysl, nemá tudíž smysl ani levá strana.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení. Primitivní funkcí k funkci x^α na intervalu $(0,1)$ je funkce $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, jestliže $\alpha \neq -1$, a $\log x$, pokud $\alpha = -1$. Přitom

$$\lim_{x\to 0+} \log x = -\infty; \qquad \lim_{x\to 1-} \log x = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \alpha > -1, \\ -\infty & \text{pro } \alpha < -1; \end{cases} \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1} \quad \text{pro } \alpha \neq -1,$$

a tedy $\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}$ pro $\alpha > -1$ a neexistuje pro $\alpha \le -1$. ■

Můžeme tedy používat všechny metody pro výpočet primitivních funkcí – per partes, substituční metody atd. Některé z těchto metod mají své analogie použitelné přímo pro určitý integrál. Jejich užití někdy „jen" zjednoduší postup výpočtu, někdy umožní spočítat integrály z funkcí, u nichž neumíme najít primitivní funkci.

§12. Metoda per partes pro určitý integrál vychází z věty:

Nechť funkce f, g jsou spojité na (a, b), funkce F je primitivní funkcí k f a funkce G je primitivní funkcí ke g na intervalu (a, b). Pak

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG,$$

pokud aspoň dva z uvedených tří výrazů jsou reálnými čísly.

Tato věta zjednoduší výpočet například tehdy, kdy potřebujeme pravidlo per partes použít opakovaně a nechce se nám psát dlouhý výraz, který je primitivní funkcí, objevují-li se v něm výrazy typu FG s přírůstkem podstatně jednodušším, například nulovým.

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ v závislosti na $n = 0, 1, \ldots$

Řešení. Označme integrál ze zadání symbolem I_n a postupujme matematickou indukcí. Spočtěme nejprve $I_0 = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$. Pokud $n \geq 1$ a I_{n-1} má smysl (tj. je reálným číslem), můžeme použít metodu per partes:

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = [x^n \cdot (-e^{-x})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} nx^{n-1}(-e^{-x})\,\mathrm{d}x = nI_{n-1},$$

protože uvedený zobecněný přírůstek je nulový. Odtud indukcí snadno plyne, že $I_n = n!$. ■

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ v závislosti na $n = 0, 1, \ldots$

Řešení. Označme integrál ze zadání symbolem I_n a použijme metodu per partes. Přitom využijme toho, že všechny integrály vyskytující se ve výpočtu existují. To proto, že je-li f spojitá na $[a, b]$, pak $\int_a^b f$ existuje (je reálným číslem), což plyne z věty v §10 (viz též §20).

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}x = \\ &= [-\cos x \cdot \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos x \cdot (n-1)\sin^{n-2} x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pokud $n \geq 2$, pak uvedený přírůstek je nulový, a tedy

$$\begin{aligned} I_n &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Dostáváme tedy rekurentní vztah

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \qquad n \geq 2.$$

Protože $I_0 = \pi/2$ a $I_1 = 1$, dostáváme pro $n \geq 1$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{1} \cdot 1. \end{aligned}$$

■

Ve větě zmíněné na počátku tohoto paragrafu je předpoklad, že aspoň dva z uvedených výrazů jsou reálnými čísly, podstatný. O tom svědčí řešení následujícího příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte integrál $\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x} \, dx$.

Řešení. Zkusíme-li použít metodu per partes pro určitý integrál, vychází

$$\int_0^\pi \sin 2x \cdot \frac{1}{\sin x} \, dx = \left[\frac{-\cos 2x}{2\sin x} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos 2x \cdot \cos x}{2\sin^2 x} \, dx,$$

pokud oba výrazy na pravé straně jsou reálným číslem. Spočtěme primitivní funkci

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x \cdot \cos x}{2\sin^2 x} \, dx &= \int \frac{(1-2\sin^2 x)\cos x}{2\sin^2 x} \, dx = \int \frac{\cos x}{2\sin^2 x} \, dx - \int \cos x \, dx = \\ &= -\frac{1}{2\sin x} - \sin x + \mathbf{C} \end{aligned}$$

a všimněme si, že žádný z výrazů $\left[\frac{-\cos 2x}{2\sin x}\right]_0^\pi$ a $\left[-\frac{1}{2\sin x} - \sin x\right]_0^\pi$ reálným číslem není. Nelze tedy použít metodu per partes pro určitý integrál. Když však použijeme metodu per partes pro výpočet primitivní funkce z §3, vyjde

$$\int_0^\pi \sin 2x \cdot \frac{1}{\sin x} \, dx = \left[\frac{-\cos 2x}{2\sin x} + \frac{1}{2\sin x} + \sin x \right]_0^\pi = [2\sin x]_0^\pi = 0.$$

Poznamenejme ještě, že tento příklad je možné spočítat jednodušeji:

$$\int_0^\pi \frac{\sin 2x}{\sin x} \, dx = \int_0^\pi 2\cos x \, dx = [2\sin x]_0^\pi = 0.$$

■

§13. První substituční metoda pro určitý integrál spočívá v použití následující věty k výpočtu integrálu ve tvaru $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$. Uvedená věta je snadným důsledkem první věty o substituci pro primitivní funkce z §4.

Nechť funkce φ je definována na intervalu (α,β), má na něm spojitou derivaci a zobrazuje jej do intervalu I; funkce f nechť je spojitá na I. Předpokládejme dále, že existují limity $a=\lim\limits_{t\to\alpha+}\varphi(t)$ a $b=\lim\limits_{t\to\beta-}\varphi(t)$. Pak

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

má-li aspoň jedna strana smysl a navíc $a\neq b$ nebo $a=b\in I$.

Při aplikaci této věty nám může vyjít také $a=b$ nebo $a>b$. Přitom ovšem užíváme konvenci, že

$$\int_a^a f=0,\qquad \int_a^b f=-\int_b^a f.$$

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int_0^{9\pi/2}\sin^n x\cos x\,\mathrm{d}x$ pro $n=1,2,\dots$

Řešení. Položme $\varphi(x)=\sin x$, $f(y)=y^n$, $(\alpha,\beta)=(0,9\pi/2)$, $I=\mathbb{R}$. Vychází $a=0$, $b=1$, tedy

$$\int_0^{9\pi/2}\sin^n x\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^1 y^n\,\mathrm{d}y=\left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

■

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int_0^{10\pi}\big(\operatorname{arctg}\big(\sin^3 x+\sin\sin x\big)-\sin x\big)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Položíme-li $\varphi(x)=\sin x$, $f(y)=\operatorname{arctg}(y^3+\sin y)-y$, $(\alpha,\beta)=(0,10\pi)$, $I=\mathbb{R}$, vychází $a=b=0\in I$, a tedy integrál ze zadání je roven

$$\int_0^0(\operatorname{arctg}(y^3+\sin y)-y)\,\mathrm{d}y=0.$$

■

Poznamenejme, že v předchozím příkladu bychom neuměli spočítat primitivní funkci, a přesto víme, že integrál je nulový.

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int_{-\pi/3}^{\pi}\frac{1}{(1+\cos x)^2}\cdot\left(\sin\frac{1}{1+\cos x}\right)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Použijme první substituční metodu pro funkci $\varphi(x)=1+\cos x$, $(\alpha,\beta)=(-\pi/3,\pi)$, $I=(0,+\infty)$ a $f(y)=-\frac{1}{y^2}\sin\frac{1}{y}$. Dostaneme $a=\frac12$ a $b=0$. Tedy integrál ze zadání je roven

$$\int_{1/2}^0\left(-\frac{1}{y^2}\right)\sin\frac1y\,\mathrm{d}y=\int_0^{1/2}\frac{1}{y^2}\sin\frac1y\,\mathrm{d}y.$$

Použijme první substituční metodu ještě jednou, tentokrát je $\varphi(y) = 1/y$, $(\alpha, \beta) = (0, 1/2)$, $I = (0, +\infty)$, $f(z) = -\sin z$. Vychází $a = +\infty$, $b = 2$, a tedy náš integrál je roven

$$\int_{+\infty}^{2} (-\sin z)\,\mathrm{d}z = \int_{2}^{+\infty} \sin z\,\mathrm{d}z = [-\cos z]_2^{+\infty},$$

kterýžto přírůstek nemá smysl, protože funkce $-\cos z$ nemá limitu v $+\infty$. A tedy podle věty z úvodu tohoto paragrafu integrál ze zadání neexistuje. ■

Následující příklad ukazuje, že předpoklady v úvodní větě jsou nezbytné.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2} \cdot \left(\sin \frac{1}{1+\cos x}\right) \cdot \sin x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Zkusme postupovat jako v předchozím příkladu pomocí první substituční metody. Funkce φ a f jsou stejné, $(\alpha, \beta) = (-\pi, \pi)$, $I = (0, +\infty)$. Vychází tedy $a = b = 0$. Protože $0 \notin I$, nejsou splněny předpoklady věty, a tudíž ji nemůžeme použít. Navíc použití jejího závěru vede k chybnému výsledku, totiž k tomu, že integrál je nulový. Spočteme-li však primitivní funkci (podle první substituční metody pro primitivní funkce z §4 s použitím stejných funkcí jako v předchozím příkladu), dostaneme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1+\cos x)^2} \cdot \sin \frac{1}{1+\cos x} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos \frac{1}{1+\cos x}\right]_{-\pi}^{\pi},$$

kterýžto přírůstek nemá smysl, protože ani jedna z příslušných limit neexistuje. ■

§14. Druhá substituční metoda spočívá v užití věty z §13 opačným směrem, totiž pro výpočet integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pomocí integrálu $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ pro vhodnou funkci φ. Zpravidla se užívá důsledek:

Nechť φ má na (α, β) spojitou derivaci a prostě zobrazuje interval (α, β) na interval (a, b). Nechť f je spojitá na (a, b). Pak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

má-li aspoň jedna strana smysl.

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Řešení. Proveďme substituci pomocí funkce $\varphi(t) = \sin t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$. Funkce φ zobrazuje tento interval na interval $(-1, 1)$ a má v něm všude derivaci $\varphi'(t) =$

$\cos t$, která je vlastní a kladná (φ je proto rostoucí, a tedy prostá). Máme

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{|\cos t|}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \pi.$$

■

<u>Příklad</u> Spočtěte $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$, kde $\varepsilon \in (0,1)$.

Řešení. Proveďme substituci pomocí funkce $\varphi(t) = 2\,\mathrm{arccotg}\, t$, $t \in \mathbb{R}$ (srovnejte s poznámkou na konci §6; zde je vhodnější použít funkci arccotg místo arctg vzhledem k tomu, že počítáme integrál přes interval $(0,2\pi)$). Funkce φ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0,2\pi)$ a $\varphi'(t) = -\frac{2}{t^2+1}$ je vlastní a záporná na $\mathbb{R}$. Ještě vyjádřeme

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\frac{x}{2}\cdot\left(\mathrm{cotg}^2\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{\mathrm{cotg}^2\frac{x}{2} - 1}{\mathrm{cotg}^2\frac{x}{2} + 1} \quad \text{pro } x \in (0,2\pi),$$

a pak máme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\varepsilon\frac{t^2-1}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{t^2+1+\varepsilon(t^2-1)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{(1+\varepsilon)(t^2+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon})}\,\mathrm{d}t.$$

Proveďme ještě jednu substituci, tentokrát pomocí funkce $\psi(u) = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\cdot u$. Funkce ψ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ a její derivace $\psi'(u) = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ je vlastní a kladná na $\mathbb{R}$. Náš integrál se tedy rovná

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}}{(1+\varepsilon)(u^2+1)\cdot\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,[\mathrm{arctg}\, u]_{-\infty}^{+\infty} =$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

■

3. Aplikace určitého integrálu

§15. Základní geometrickou motivací pro zavedení a počítání určitého integrálu je **výpočet obsahu plochy pod grafem** funkce, případně plochy ohraničené grafy různých funkcí.

<u>P ř í k l a d</u> Určete obsah plochy pod grafem (a nad osou x) funkce $y = x^2$ na intervalu $[3, 7]$.

Řešení. Tato plocha je rovna integrálu

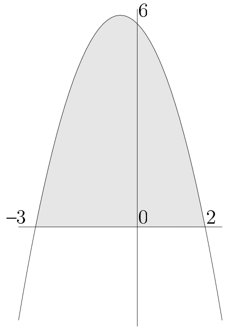
$$\int_3^7 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^7 = \frac{316}{3}.$$

■

Funkce v předchozím příkladu byla nezáporná, a tedy nebyl žádný problém s interpretací. I interval byl explicitně dán. Často je však zadání formulováno tak, že je třeba si rozmyslet, o jakou plochu přesně jde, obvykle s pomocí obrázku.

<u>P ř í k l a d</u> Vypočtěte obsah omezené plochy ohraničené osou x a parabolou $y = 6 - x - x^2$.

Řešení.



Když se podíváme, jak graf vypadá, jde zřejmě o plochu pod grafem a nad osou x na intervalu $[-3, 2]$, tj. o množinu $\{(x, y) \colon x \in [-3, 1] \text{ a } 0 \leq y \leq 6 - x - x^2\}$.

Počítejme
$$\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[6x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{3}=\frac{125}{6}.$$

■

P ř í k l a d Spočtěte obsah omezené plochy ohraničené grafy funkcí $y=\sqrt{x}$ a $y=x^2$.

Řešení. Na intervalu $[0,1]$ je $x^2\le\sqrt{x}$, na intervalu $(1,+\infty)$ je $x^2>\sqrt{x}$. Jde tedy o množinu $\{(x,y)\colon x\in[0,1] \text{ a } x^2\le y\le\sqrt{x}\}$. Její obsah se rovná
$$\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}.$$

■

§16. Dalším využitím určitého integrálu je **výpočet délky křivky**. Křivkou můžeme myslet graf funkce, jako v [I1, Kapitola V, §2], nebo také „parametrickou křivku“ neboli „cestu“ (viz například [FI, oddíl 235] a [FII, oddíl 329]), tj. funkci z intervalu do $\mathbb{R}^n$. V obou případech se obvykle definuje délka křivky pomocí aproximace lomenou čárou (viz uvedené odkazy). V [FI] se uvažují jen prosté parametrické křivky (pro případ $n=2$). Nicméně definici lze použít i pro křivky, jež nejsou prosté. Pak mluvíme o délce cesty, nikoli o délce „křivky jakožto množiny bodů“ (viz též níže uvedené příklady a poznámky). Použití integrálu při výpočtu délky křivky umožňují následující věty.

Výpočet délky grafu funkce: Nechť f je spojitá reálná funkce na intervalu $[a,b]$ a má vlastní derivaci ve všech bodech (a,b) (případně s výjimkou konečně mnoha bodů). Pak délka grafu funkce f na intervalu $[a,b]$ je rovna
$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x,$$
pokud tento integrál existuje (jako zobecněný Riemannův).

Výpočet délky parametricky zadané křivky („délky cesty“): Nechť
$$\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$$
je spojitá parametrická křivka a derivace funkcí $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ jsou spojité na (a,b) (případně s výjimkou konečně mnoha bodů). Pak délka této křivky se rovná
$$\int_a^b\sqrt{(\varphi_1'(x))^2+\dots+(\varphi_n'(x))^2}\,\mathrm{d}x,$$
pokud tento integrál existuje (jako zobecněný Riemannův).

Poznamenejme, že první z uvedených vět je vlastně speciálním případem druhé (uvažujeme-li parametrickou křivku $\varphi(x) = (x, f(x))$) a že analogická věta platí i pro funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

P ř í k l a d Spočtěte délku grafu funkce $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, \log 3]$.

Řešení. Funkce f je spojitá a má vlastní derivaci na celém $\mathbb{R}$, a tak stačí dosadit do vzorečku. Délka se rovná

$$\int_0^{\log 3} \sqrt{1 + (e^x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme druhou substituční metodu (viz §14) pro funkci $\varphi(t) = \log t$, $t \in (1,3)$. Integrál se tedy rovná

$$\int_1^3 \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^3 \sqrt{1+t^2}\frac{1}{2t^2} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^9 \sqrt{1+u}\frac{1}{2u}\,\mathrm{d}u.$$

Nyní proveďme substituci „$z = \sqrt{1+u}$“ (viz §7), neboli $u = z^2 - 1$, $z \in (\sqrt{2}, \sqrt{10})$ (používáme druhou substituční metodu dle §14). Pak je integrál roven

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{z}{2(z^2-1)} 2z\,\mathrm{d}z &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \frac{z^2}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)\right)\mathrm{d}z \\
&= \sqrt{10} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[\log(z-1) - \log(z+1)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{10}} \\
&= \sqrt{10} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1} - \log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).
\end{aligned}$$

■

Křivkou se často myslí nikoli funkce z intervalu do $\mathbb{R}^n$, ale obor jejích hodnot, tedy „obraz intervalu“. To bude i případ následujícího příkladu. I její délku pak počítáme podle uvedeného vzorečku pro parametrickou křivku. Je však třeba zvolit parametrizaci $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, která je na (a,b) prostá a třídy C^1. (Za těchto předpokladů lze ukázat, že výsledek nezávisí na volbě parametrizace – viz například [Ko, Věta 14.5 a Poznámka 14.7].)

P ř í k l a d Spočtěte délku kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení. Použijeme parametrické vyjádření kružnice $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Toto dává cestu $\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, která je prostá na $(0, 2\pi)$. Navíc $\varphi'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ je spojitá. Dosazením do vzorečku zjistíme, že délka je

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r.$$

■

§17. Určitého (jednorozměrného) integrálu je možno využít i k **výpočtu objemů a povrchů rotačních těles.** Na rozdíl od předchozích aplikací, kde byla jasná intuice, co to je obsah a délka, a byl zřejmý vztah k určitému integrálu, zde je situace složitější. I pojmy objemu a povrchu lze ovšem přesně specifikovat a ukázat, jak je počítat. Vyžaduje to ale obecnější teorii. Ve speciálních případech rotačních těles však platí níže uvedené vzorečky, které jsou intuitivně názorné, vezmeme-li v úvahu vzorec pro výpočet délky grafu z §16 a dále vzorečky pro délku kružnice a obsah kruhu.

Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na $[a,b]$. Uvažme těleso, jež vznikne rotací „plochy pod grafem“ funkce f okolo osy x. Pak jeho objem se rovná $\pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$. Pokud f má vlastní derivaci všude v (a,b) (případně s výjimkou konečně mnoha bodů), pak povrch pláště je roven $2\pi \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$, pokud tento integrál existuje (jako zobecněný Riemannův).

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte objem rotačního elipsoidu.

Řešení. Rotační elipsoid je těleso, které vznikne rotací elipsy kolem jedné z jejích os. Označme délky poloos této elipsy písmeny a a b a předpokládejme, že rotuje kolem osy délky $2a$. Pak náš elipsoid můžeme interpretovat jako těleso vzniklé rotací grafu funkce $f(x) = b\sqrt{1-(x/a)^2}$ na intervalu $[-a,a]$ okolo osy x. Nyní můžeme dosadit do vzorečku a objem vychází

$$\pi \int_{-a}^{a} b^2(1-(x/a)^2)\,\mathrm{d}x = \pi b^2 \left(2a - \left[\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a}\right) = \pi b^2(2a - \frac{2}{3}a) = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

■

<u>P ř í k l a d</u> Spočtěte povrch koule o poloměru $r > 0$.

Řešení. Kouli o poloměru r můžeme interpretovat jako těleso vzniklé rotací grafu funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ na intervalu $[-r,r]$ okolo osy x. Dosaďme do vzorečku a počítejme:

$$2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-r}^{r} r\,\mathrm{d}x = 4\pi r^2.$$

■

§18. Další možnou aplikací je využití věty z §10 k **výpočtu limit některých speciálních posloupností.**

P ř í k l a d Spočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

Řešení. Použijeme větu z §10 pro $f(x)=\sqrt{x}$ na intervalu $[1,2]$. Dělení D_n nechť je ekvidistantní dělení $1<1+\frac{1}{n}<1+\frac{2}{n}<\cdots<2$ a zvolme $\xi_i^n=1+\frac{i}{n}$. Pak je limita ze zadání rovna $\int_1^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^2=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. ■

§19. Přirozenou aplikací určitého integrálu je **výpočet průměrné hodnoty funkce**. Počítá se podle následujícího pravidla.

Průměrnou hodnotou funkce f na intervalu (a,b) (kde $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$) rozumíme číslo $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$, pokud integrál vpravo existuje.

P ř í k l a d Spočtěte průměrnou hodnotu funkce $\sin x$ na intervalu $(0,\pi)$.

Řešení. Průměrná hodnota se rovná

$$\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^\pi=\frac{2}{\pi}.$$

■

P ř í k l a d Hmotný bod se pohybuje po přímce. V čase t má rychlost $t+1+\cos t$. Jaká je průměrná rychlost v časovém intervalu $(0,T)$?

Řešení. Průměrná rychlost je průměrná hodnota rychlosti, a tedy je rovna

$$\frac{1}{T}\int_0^T(t+1+\cos t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}t^2+t+\sin t\right]_0^T=\frac{1}{2}T+1+\frac{\sin T}{T}.$$

■

4. Konvergence určitého integrálu

Budeme se zabývat následující úlohou. Nechť funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a,b) (omezeném či neomezeném). Existuje integrál $\int_a^b f$ (zobecněný Riemannův či Newtonův – kteréžto dva pojmy pro takové funkce splývají)? V případě, že $\int_a^b f$ existuje (tj. je roven nějakému reálnému číslu), řekneme, že integrál konverguje. V opačném případě řekneme, že diverguje. Pokud konverguje integrál $\int_a^b |f|$, řekneme, že $\int_a^b f$ konverguje absolutně. Pokud integrál konverguje, ale nikoli absolutně, říkáme, že konverguje neabsolutně. Budeme se držet této terminologie spíše než pojmů „existuje" a „neexistuje", protože tyto pojmy mají u jiných integrálů (např. Lebesgueova) jiný význam. Porovnejte pojmy divergence, konvergence a absolutní konvergence s analogickými pojmy pro řady.

§20. První metodou je použití věty, která říká, že *je-li f funkce* **spojitá na uzavřeném intervalu** $[a,b]$, *pak $\int_a^b f$ konverguje* (viz např. §10).

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_7^{50} \operatorname{arctg}(x^5+16)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože integrovaná funkce je spojitá na intervalu $[7,50]$.

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože funkce

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

je spojitá na $[0,1]$. Zde využíváme toho, že integrál z funkce f od a do b závisí jen na hodnotách f na (a,b) a ne na tom, zda a případně jak je f definována v krajních bodech. Můžeme-li ji tam však dodefinovat spojitě, pak lze použít výše uvedenou větu.

§21. Další možností je **výpočet určitého integrálu** s využitím primitivní funkce dle §11. Z výpočtů v §11 plyne tvrzení v následujícím příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha>-1$.

Výpočet druhého příkladu je zcela analogický, a tak ho necháváme na čtenáři.

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha<-1$.

Uvedené dva příklady jsou užitečné pro vyšetřování konvergence mnoha jiných integrálů, jak uvidíme později.

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože

$$\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x=[x\log x]_0^1-\int_0^1 1\,\mathrm{d}x=-1.$$

§22. Integrál součtu. Občas se hodí následující jednoduché pozorování.

Nechť f, g jsou spojité na (a,b) a $\int_a^b g$ konverguje. Pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b (f+g)$.

<u>Příklad</u> Konverguje integrál $\int_0^1 \frac{1-\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$?

Řešení. Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje (viz §20), zatímco $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverguje dle příkladu v předchozím paragrafu. Proto podle uvedeného tvrzení náš integrál diverguje. ■

Další, méně triviální, případy použití pozorování z tohoto paragrafu v kombinaci s jinými kritérii jsou uvedeny dále.

§23. Bolzano-Cauchyova podmínka. Následující věta dává nutnou a postačující podmínku pro konvergenci integrálu. Je přeformulací Bolzano-Cauchyovy podmínky pro existenci vlastní limity primitivní funkce.

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a,b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a,b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí $|\int_{x_1}^{x_2} f| < \varepsilon$. Analogické tvrzení platí pro interval typu $(a,b]$.

<u>Příklad</u> Je-li $\alpha \geq 0$, integrál $\int_1^\infty x^\alpha \sin x\,\mathrm{d}x$ diverguje.

Řešení. Použijeme Bolzano-Cauchyovu podmínku. Je-li $k \geq 1$ celé číslo, platí

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^\alpha \sin x\,\mathrm{d}x\right| \geq (k\pi)^\alpha \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2(k\pi)^\alpha \geq 2\pi^\alpha.$$

Zvolme nyní $\varepsilon = \pi^\alpha$. Pro každé $b' < \infty$ existuje $k \geq 1$ celé tak, že $k\pi > b'$. Položme $x_1 = k\pi$ a $x_2 = (k+1)\pi$. Pak dle uvedeného výpočtu je $\left|\int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \sin x\,\mathrm{d}x\right| > \varepsilon$. Integrál proto diverguje. ■

§24. Srovnávací kritérium je obsaženo v následující větě.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu (a,b) a pro každé $x \in (a,b)$ platí $|f(x)| \leq g(x)$. Pokud $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ konverguje též. (A tedy, diverguje-li $\int_a^b f$, diverguje i $\int_a^b g$.)

Důsledkem je následující tvrzení.

Nechť f je funkce spojitá na (a,b). Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, pak i konverguje.

<u>Příklad</u> Pokud $\alpha > 1$, pak $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje (dokonce absolutně).

Řešení. Platí totiž $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha}$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ pro $\alpha > 1$ konverguje (viz §21). Proto podle srovnávacího kritéria $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \mathrm{d}x$ konverguje. Tedy i původní integrál konverguje (dokonce absolutně). ∎

<u>P ř í k l a d</u> Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \,\mathrm{d}x$ diverguje.

Řešení. Pro $x \in (1, \infty)$ je totiž $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \ge \frac{\operatorname{arctg} 1}{x} = \frac{\pi}{4x} \ge 0$ a integrál $\int_1^\infty \frac{\pi}{4x}\,\mathrm{d}x$ diverguje. ∎

§25. Užitečnou variantou srovnávacího kritéria je **limitní srovnávací kritérium**.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a,b)$ (kde $-\infty < a < b \le +\infty$), funkce g nechť je kladná na $[a,b)$.

(i) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ také konverguje (dokonce absolutně).

(ii) Pokud limita $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.

Analogická tvrzení platí pro interval typu $(a,b]$.

<u>P ř í k l a d</u> Zjistěte, pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. Funkce $f(x) = \sin^\alpha x$ a $g(x) = x^\alpha$ jsou spojité a kladné na $(a,b] = (0,\pi/2]$ a platí
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^\alpha x}{x^\alpha} = 1,$$
tedy integrál ze zadání konverguje, právě když konverguje $\int_0^{\pi/2} x^\alpha \,\mathrm{d}x$. Ten ovšem konverguje právě pro $\alpha > -1$. To můžeme ověřit přímým výpočtem. Plyne to též z prvního příkladu v §21 s použitím faktu, že $\int_1^{\pi/2} x^\alpha \,\mathrm{d}x$ konverguje dle §20.

Závěr je, že integrál konverguje právě pro $\alpha > -1$. ∎

<u>P ř í k l a d</u> Zjistěte, zda konverguje $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Řešení. Integrand je spojitý na $(0,\pi]$ a platí
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}} = \sqrt{2}.$$

Tedy vyšetřovaný integrál konverguje, právě když konverguje $\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Ten ovšem diverguje, tudíž diverguje i původní integrál. ∎

<u>P ř í k l a d</u> Pro které hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_0^{+\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \,\mathrm{d}x$?

Řešení. Integrand je spojitý na $(0,+\infty)$. Využijeme toho, že integrál $\int_0^\infty$ konverguje, právě když konvergují oba integrály $\int_0^1$ a $\int_1^\infty$.

Na intervalu $(0,1]$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^{\alpha+\beta}} = 1$, a tedy $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x \,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x$, což je právě když $\alpha+\beta > -1$.

I na intervalu $[1,\infty)$ je integrand spojitý a platí $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x}{x^\alpha} = (\pi/2)^\beta$, tudíž $\int_1^\infty x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$, což je právě když $\alpha < -1$.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1 < \alpha+\beta$. ■

§26. Dále můžeme použít některé věty používané při výpočtu určitého integrálu, konkrétně **metodu per partes** z §12 a **věty o substituci** podle §13 a zvláště §14.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha > 0$.

Řešení. Již víme z §24, že pro $\alpha > 1$ tento integrál konverguje absolutně. Z §23 dále víme, že pro $\alpha \le 0$ integrál diverguje. Pro $\alpha \in (0,1]$ (nebo rovnou pro všechna $\alpha > 0$) můžeme použít metodu per partes. Tedy

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos x}{x^\alpha}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}x,$$

jsou-li aspoň dva ze tří uvedených výrazů reálným číslem. Přitom zobecněný přírůstek na pravé straně je reálným číslem pro každé $\alpha > 0$ a integrál na pravé straně pro $\alpha > 0$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria. Tedy i integrál na levé straně konverguje. ■

<u>Příklad</u> Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x$?

Řešení. Pokud $\alpha < 0$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = 1$, a tedy integrál konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x$. To je právě pro $\alpha < -1$.

Pro $\alpha = 0$ integrál diverguje, protože je to integrál z nenulové konstantní funkce $\sin 1$ na neomezeném intervalu.

Zbývá vyšetřit případ $\alpha > 0$. Použijme druhou substituční metodu z §14 pro funkci $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$. Pak

$$\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin t\,\mathrm{d}t,$$

pokud aspoň jeden z integrálů konverguje. Přitom integrál na pravé straně podle předchozího příkladu konverguje, právě když $\frac{1}{\alpha} - 1 < 0$, tj. $\alpha > 1$.

Závěr je, že integrál ze zadání konverguje, právě když $\alpha < -1$ nebo $\alpha > 1$. ■

§27. Užitečným kritériem pro neabsolutní konvergenci integrálu je **Dirichletovo kritérium**.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a,b)$, každá (ekvivalentně nějaká) primitivní funkce k f je omezená na (a,b), funkce g je monotónní na $[a,b)$ a $\lim\limits_{x\to b-} g(x) = 0$. Pak $\int_a^b fg$ konverguje. Analogické tvrzení platí pro intervaly typu $(a,b]$.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ pro $\alpha > 0$ konverguje.

Řešení. Funkce $f(x) = \cos x$ má omezenou primitivní funkci $\sin x$, funkce $g(x) = 1/x^\alpha$ je klesající a má v $+\infty$ limitu 0. Navíc jsou obě funkce spojité na $[1,\infty)$, a tedy integrál konverguje dle Dirichletova kritéria. ■

Poznamenejme, že tento příklad bychom mohli řešit pomocí metody per partes jako v §26. To není náhoda, Dirichletovo kritérium pro případ, kdy g má spojitou derivaci, lze pomocí metody per partes dokázat.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.

Řešení. Konvergence pro $\alpha > 1$ byla dokázána v §24, divergence pro $\alpha \le 0$ plyne z příkladu v §23 a z toho, že absolutní konvergence implikuje konvergenci (viz §24). Nechť $\alpha \in (0,1]$. Platí

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \ge \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}.$$

Přitom $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ diverguje a $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje podle Dirichletova kritéria (funkce x^α je klesající a má v ∞ limitu 0, funkce $\cos 2x$ má omezenou primitivní funkci). A tedy $\int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverguje (viz §22). Podle srovnávacího kritéria původní integrál diverguje. ■

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje integrál $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Funkce $\sin x$ má omezenou primitivní funkci, a tak můžeme zkusit použít Dirichletovo kritérium. Funkce $\frac{1}{x+2\sin x}$ má limitu 0, ale není monotónní (jest $(x+2\sin x)' = 1 + 2\cos x$, a tato derivace pravidelně mění znaménko). Takže Dirichletovo kritérium použít nelze. Víme však, že konverguje $\int_2^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ a můžeme zkusit použít postřehu z §22. Tedy náš integrál konverguje, právě když konverguje integrál $\int_2^\infty \left(\frac{\sin x}{x+2\sin x} - \frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$. Upravíme-li integrand, vyjde $\int_2^\infty \frac{-2\sin^2 x}{x(x+2\sin x)}\,\mathrm{d}x$. Tento integrál srovnáme s konvergentním integrálem $\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$. Je totiž

$$|-2\sin^2 x| \le 2 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x(x+2\sin x)}}{\frac{1}{x^2}} = 2.$$

Proto $\int_2^\infty \frac{-2\sin^2 x}{x(x+2\sin x)}\,\mathrm{d}x$ konverguje, a tudíž i integrál ze zadání konverguje. ■

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje integrál $\int_4^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Postupujme podobně jako v předchozím příkladu s využitím faktu, že $\int_4^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ konverguje. Jest $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{-2\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)}$, konvergence integrálu ze zadání je tedy ekvivalentní konvergenci $\int_4^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)}\,\mathrm{d}x$. S ohledem na předminulý příklad lze odhadnout, že tento integrál bude divergovat. Pokusme se to dokázat. Platí

$$\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)} \geq \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}.$$

Protože $\int_4^\infty \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\,\mathrm{d}x$ konverguje podle Dirichletova kritéria, stačí ukázat, že integrál $\int_4^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$ diverguje. To plyne z limitního srovnávacího kritéria, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ a $\int_4^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverguje. Tak jsme ukázali, že integrál ze zadání diverguje. ■

Předchozí příklad svědčí o tom, že Dirichletovo kritérium by neplatilo, kdybychom v něm vynechali předpoklad monotonie funkce g. Předminulý příklad naproti tomu ukazuje, že absence monotonie nezaručí divergenci.

§28. Spolu s Dirichletovým kritériem se obvykle uvádí **Abelovo kritérium**. Uvádíme ho zde zvlášť, protože na rozdíl od Dirichletova kritéria má i symetrickou verzi.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a,b)$, funkce g nechť je na tomto intervalu monotónní a omezená.

(i) Jestliže konverguje $\int_a^b f$, konverguje i integrál $\int_a^b fg$.

(ii) Pokud navíc $\lim\limits_{x\to b-} g(x) \neq 0$, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_a^b fg$.

Analogické tvrzení platí pro intervaly typu $(a,b]$.

<u>Příklad</u> Zjistěte, pro které hodnoty parametrů konverguje, případně absolutně konverguje, $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\cdot \operatorname{arctg}^\beta x \cdot \frac{x^2}{x^2+1}\cdot \cos\frac{1}{x}\cdot x^\gamma\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Nejprve si úlohu zjednodušíme podle symetrické verze Abelova kritéria. Všechny činitele v integrandu jsou spojité funkce na $[1,\infty)$. Funkce $\cos(1/x)$ je na $[1,\infty)$ rostoucí a v ∞ má limitu 1. A tedy konvergence (absolutní konvergence) integrálu ze zadání je ekvivalentní konvergenci (absolutní konvergenci) integrálu $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\cdot\operatorname{arctg}^\beta x\cdot\frac{x^2}{x^2+1}\cdot x^\gamma\,\mathrm{d}x$. To plyne z Abelova kritéria. Dále funkce $\operatorname{arctg}^\beta x$ je monotónní (rostoucí pro $\beta>0$, klesající pro $\beta<0$, konstantní pro $\beta=0$) a má v ∞ vlastní nenulovou limitu $(\pi/2)^\beta$. Funkce $\frac{x^2}{x^2+1} = 1-\frac{1}{x^2+1}$ je rostoucí a má limitu 1. Dvojí použití Abelova kritéria dává, že konvergence (absolutní konvergence) zkoumaného integrálu je ekvivalentní konvergenci (absolutní konvergenci) integrálu $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\cdot x^\gamma\,\mathrm{d}x$.

Teprve nyní musíme rozlišit některé případy.

Je-li $\alpha < 0$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin(x^\alpha)x^\gamma}{x^{\alpha+\gamma}} = 1$, a tedy podle §25 náš integrál konverguje, právě když konverguje $\int_1^\infty x^{\alpha+\gamma}\,\mathrm{d}x$, což je právě pro $\alpha+\gamma < -1$. Navíc v tomto případě je integrand nezáporný, a tedy konvergence je totéž co absolutní konvergence.

Jestliže $\alpha = 0$, pak jde o nenulový násobek integrálu $\int_1^\infty x^\gamma\,\mathrm{d}x$, který konverguje (absolutně konverguje) právě pro $\gamma < -1$.

Pokud $\alpha > 0$, provedeme substituci pomocí funkce $\varphi(t) = t^{1/\alpha}$, podobně jako v §26. Pak vyjde, že

$$\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\cdot x^\gamma\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{\alpha} t^{\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-1}\sin t\,\mathrm{d}t,$$

pokud alespoň jeden z integrálů konverguje. Z §26 víme, že integrál napravo konverguje, právě když $\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-1 < 0$, což je ekvivalentní podmínce $\gamma+1-\alpha < 0$.

Z věty o substituci v §14 plyne též, že integrál nalevo konverguje absolutně, právě když konverguje absolutně integrál napravo. A to je, právě když $\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}-1 < -1$ (viz §27), neboli $\gamma < -1$.

Závěrem shrňme výsledky. Integrál konverguje absolutně, pokud $\alpha \le 0$ a $\gamma < -1-\alpha$, nebo $\alpha > 0$ a $\gamma < -1$. Integrál konverguje neabsolutně, pokud $\alpha > 0$ a $-1 \le \gamma < -1+\alpha$. V ostatních případech diverguje. ■

5. Obyčejné diferenciální rovnice

V následujících paragrafech předvedeme několik základních metod řešení speciálních případů *diferenciální rovnice*

$$y' = f(x,y),$$

kde f je zobrazení podmnožiny $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Připomeňme, že *řešením diferenciální rovnice* se rozumí funkce $\eta\colon (a,b)\to\mathbb{R}^n$, pro kterou platí, že $\eta'(x) = f(x,\eta(x))$ na intervalu (a,b). Jistě nebude na úkor srozumitelnosti, když budeme dále většinou používat pro neznámou y i pro řešení η stejného značení, např. y.

Neexistuje-li řešení, které by bylo prodloužením řešení η na interval (a',b'), který obsahuje (a,b) jako vlastní podmnožinu, pak říkáme, že $\eta\colon (a,b)\to\mathbb{R}^n$ je *maximální řešení*. Poznamenejme, že každé řešení je restrikcí nějakého maximálního řešení. Nalezením všech maximálních řešení jsou tudíž popsána všechna řešení.

Požadujeme-li, aby řešení splňovalo rovnost $y(x_0) = y_0$ pro nějakou dvojici $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, mluvíme o *počáteční podmínce*.

Začněme s typem rovnic, k jejichž řešení nepotřebujeme o mnoho více než ovládat některé metody hledání primitivních funkcí.

§29. Rovnice se separovanými proměnnými. K základním dovednostem patří řešení diferenciálních rovnic tvaru

$$y'h(y) = g(x), \tag{SP}$$

kterým se říká „rovnice se separovanými proměnnými“. Předpokládejme, že funkce $h\colon J \to \mathbb{R}$ a $g\colon I \to \mathbb{R}$ jsou spojité na otevřených intervalech J a I. Metoda řešení rovnice (SP) je založena na pozorování, že každé řešení $y = y(x)$ definované na otevřeném intervalu $I_0 \subset I$ s hodnotami v J musí pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ splňovat na intervalu I_0 rovnici

$$H(y(x)) = G(x) + c,$$

kde $H'(y) = h(y)$ pro $y \in J$, $G'(x) = g(x)$ pro $x \in I$. Naopak, má-li nějaká funkce y vlastní derivaci na I a splňuje-li uvedenou rovnici, pak je řešením. Je-li H prostá na otevřeném intervalu $J_0 \subset J$ (například pokud funkce h nenabývá na J_0 hodnoty 0), pak všechna maximální řešení (SP) s hodnotami v J_0 jsou tvaru $y_c(x) = H_0^{-1}(G(x) + c)$ na maximálních otevřených intervalech obsažených v $U_c = (G + c)^{-1}(H_0(J_0))$, kde H_0 je restrikce H na J_0.

Jak použít toto tvrzení (či pozorování) si ukážeme na řešení konkrétních příkladů. Také ukážeme, jak lze některé úlohy, které nejsou tvaru (SP) řešit pomocí úloh, které tvar (SP) mají.

Poznámky.

1. Výše naznačený postup řešení ukazuje, že k řešení („integrování“) rovnice ve tvaru (SP) je potřeba především najít primitivní funkce k funkcím g a h.

2. Jak uvidíme v §31, rovnice se separovanými proměnnými ve tvaru (SP) jsou speciálním případem rovnic v exaktním tvaru.

Příklad   Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y'y = x^3.$$

Řešení. Funkce $g(x) = x^3$ a $h(y) = y$ jsou spojité na $\mathbb{R}$. Najděme nějaké primitivní funkce k funkcím g a h na $\mathbb{R}$. Jsou to například funkce $G(x) = \frac{1}{4}x^4$ a $H(y) = \frac{1}{2}y^2$. Funkce y definovaná na otevřeném intervalu I je tudíž řešením naší rovnice, právě když má všude v I vlastní derivaci a existuje takové $c \in \mathbb{R}$, že

$$\frac{1}{2}(y(x))^2 = \frac{1}{4}x^4 + c, \qquad x \in I. \tag{*}$$

Funkce H ovšem není prostá na $\mathbb{R}$, maximální otevřené intervaly, na nichž je prostá, jsou $J_1 = (-\infty, 0)$ a $J_2 = (0, +\infty)$. Hledejme nejprve řešení s hodnotami v J_1 nebo v J_2. Protože obrazem každého z intervalů J_1 a J_2 při funkci H je interval $(0,+\infty)$, plyne z (*), že řešení s hodnotami v J_1 nebo J_2 jsou definována na intervalech obsažených v množině $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{4}x^4 + c > 0\}$. To jsou intervaly:

$$\begin{gathered} \mathbb{R} \qquad \text{pro } c > 0, \\ (-\infty, 0) \text{ a } (0, +\infty) \qquad \text{pro } c = 0, \\ (-\infty, -\sqrt[4]{-4c}) \text{ a } (\sqrt[4]{-4c}, +\infty) \qquad \text{pro } c < 0. \end{gathered}$$

Na těchto intervalech mají tedy řešení tvar

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2c} \qquad \text{nebo} \qquad y(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 2c}.$$

Zbývá zjistit, zda tato řešení jsou maximální, a případně z nich maximální řešení poslepovat.

Řešení příslušná $c > 0$ jsou maximální, protože jsou definována na celém $\mathbb{R}$, a není je proto možné již prodloužit. Uvažme dále řešení příslušná $c < 0$. Ta jsou definována na intervalech $(-\infty, -\sqrt[4]{-c})$ a $(\sqrt[4]{-c}, +\infty)$. Jeden krajní bod je $-\infty$ nebo $+\infty$, a tedy příslušným směrem řešení prodloužit nelze. V druhém krajním bodě má řešení limitu 0, a tudíž případné prodloužení tam musí mít hodnotu 0. Z rovnice ovšem plyne, že hodnoty 0 může řešení nabývat jen v bodě $x = 0$. To však není náš případ, a tedy i řešení příslušná $c < 0$ jsou maximální.

Zbývá prozkoumat řešení příslušná $c = 0$. To jsou řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (0, +\infty); \qquad & y_2(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (0, +\infty); \\ y_3(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (-\infty, 0); \qquad & y_4(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Všechna tato řešení mají v bodě 0 limitu 0 (pro y_1 a y_2 uvažujeme limitu zprava, pro y_3 a y_4 limitu zleva), proto funkce, která bude definována jako y_3 nebo y_4 na $(-\infty, 0)$, jako 0 v bodě 0 a jako y_1 nebo y_2 na $(0, +\infty)$ bude řešením naší rovnice v případě, že v bodě 0 bude mít vlastní derivaci. (Pak má totiž vlastní derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$, na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ rovnici splňuje, protože se tam shoduje s nějakým řešením, a v bodě 0 ji splňuje též, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením.) V našem případě pro všechny čtyři kombinace vyjde v 0 derivace 0 (například proto, že „slepené“ funkce jsou v bodě 0 spojité a všechny z funkcí $y_1, \ldots, y_4$ mají v bodě 0 z příslušné strany limitu derivace rovnu 0). Dostáváme tedy čtyři maximální řešení:

$$\begin{aligned} y_1^m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in \mathbb{R}; \qquad & y_2^m(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \in \mathbb{R}; \\ y_3^m(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x|x|, \; x \in \mathbb{R}; \qquad & y_4^m(x) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x|x|, \; x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Všechna maximální řešení jsou tudíž tato čtyři a výše spočtená řešení příslušná $c \neq 0$ (pro $c > 0$ je to jedno řešení definované na $\mathbb{R}$, pro $c < 0$ dvě řešení definovaná na menších intervalech). ■

<u>Příklad</u> Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' \cos y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Řešení. Funkce $\frac{1}{\cos^2 x}$ není definována v bodech $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Navíc si všimněme, že rovnice nemůže být splněna, pokud $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro každé řešení $y\colon I \to \mathbb{R}$ musí proto platit $I \subset I_k$ a $y(I) \subset I_n$ pro nějaká $k, n \in \mathbb{Z}$, kde $I_k = (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Uvažujme $k, n \in \mathbb{Z}$ pevná.

Označme g_k restrikci funkce $\frac{1}{\cos^2 x}$ na I_k a h_n restrikci funkce $\cos y$ na I_n. Najdeme nějaké primitivní funkce $G_k\colon I_k \to \mathbb{R}$ ke g_k a $H_n\colon I_n \to \mathbb{R}$ k h_n. Např. $G_k(x) = \operatorname{tg} x$ pro $x \in I_k$ a $H_n(y) = \sin y$ pro $y \in I_n$. Řešíme nyní pro $c \in \mathbb{R}$ úlohu najít všechny funkce $y = y(x)$ definované na maximálním možném otevřeném intervalu $I \subset I_k$ s hodnotami v I_n tak, aby byla splněna rovnost $\sin y(x) = \operatorname{tg} x + c$ pro $x \in I$. Nutně musí být $\operatorname{tg} x + c \in (-1, 1)$, a tedy $x \in (k\pi + \operatorname{arctg}(-1-c), k\pi + \operatorname{arctg}(1-c))$. Řešíme-li rovnici $\sin y_{k,c,n}(x) = \operatorname{tg} x + c$, pro $x \in I_k$ a $y_{k,c,n}(x) \in I_n$, dostáváme, že

$$y_{k,c,n}(x) = n\pi + (-1)^n \arcsin(\operatorname{tg} x + c)$$

na intervalu $(k\pi + \operatorname{arctg}(-1-c), k\pi + \operatorname{arctg}(1-c))$ jsou všechna maximální řešení dané rovnice.

■

<u>Příklad</u> Popište všechna neomezená maximální řešení rovnice

$$y' = \frac{y^2}{1 + x^2}.$$

Řešení. Rovnice není ve tvaru uvedeném na začátku tohoto paragrafu. Budeme-li se ovšem zajímat o řešení (ne nutně maximální) $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, která na (a,b) nenabývají hodnotu nula, můžeme zřejmě řešit rovnici $y' \frac{1}{y^2} = \frac{1}{1+x^2}$. Výše popsaná metoda vede na rovnici

$-\frac{1}{y} = \operatorname{arctg} x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Pokud je tedy pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ funkce $\operatorname{arctg} x + c$ nenulová na intervalu (a,b), je funkce $y(x) = -\frac{1}{\operatorname{arctg} x + c}$ řešením naší rovnice na tomto intervalu. Vrátíme-li se k naší původní rovnici, povšimneme si, že identicky nulová funkce je jejím řešením. Dále si povšimneme, že žádné z nenulových řešení nemá ani v jednom krajním bodě limitu nula. Proto neexistuje řešení, které se rovná nulovému řešení na nějakém intervalu a jinému řešení na jiném intervalu (zkuste si to promyslet podrobně). Pro

$c \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jsou mezi nalezenými řešeními jen omezená (maximální z nich jsou definována na celém $\mathbb{R}$).

Pro $c = -\frac{\pi}{2}$ a $c = \frac{\pi}{2}$ dostáváme, že řešení $y(x) = -\frac{1}{\operatorname{arctg} x + c}$ je neomezené a definované na $\mathbb{R}$.

Pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dostáváme, že řešení $y(x) = -\frac{1}{\operatorname{arctg} x + c}$ je neomezené a maximální, je-li definované buď na intervalu $(-\infty, \operatorname{tg}(-c))$, nebo na $(\operatorname{tg}(-c), \infty)$.

■

P ř í k l a d   Najděte všechna lichá maximální řešení úlohy

$$y' = 2\sqrt{|y|},\ y(2) = 1.$$

Řešení. Funkce identicky rovná nule na $\mathbb{R}$ je opět maximálním řešením. Uvažujme nyní řešení $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, která nabývají na (a,b) jen kladných, případně jen záporných, hodnot. V těchto případech tedy řešíme rovnici $y'\frac{1}{2\sqrt{|y|}} = 1$ a metoda řešení rovnic se separovanými proměnnými nám dává rovnici

$\sqrt{y} = x + c$ pro $y > 0$, a tedy $x > -c$;

a rovnici

$-\sqrt{-y} = x + c$ pro $y < 0$, a tedy $x < -c$.

Dostáváme tak řešení $y(x) = (x+c)^2$ pro $x > -c$ a $y(x) = -(x+c)^2$ pro $x < -c$.

Tentokrát mají ovšem tato řešení v bodě $-c$ limitu nulovou, a proto budeme zvažovat, zda lze definovat řešení, které bude na různých částech definičního oboru definováno různými ze zmíněných možností. Povšimneme si proto, že derivace funkce $\pm(x+c)^2$ v bodě $-c$ je rovna nule. Každé řešení naší úlohy bude navíc neklesající, neboť má nezápornou derivaci v každém bodě. Jediné řešení, které splňuje rovnost $y(2) = 1$ a je zároveň kladné na celém definičním intervalu, je $y(x) = (x-1)^2$ a to na maximálním intervalu (vzhledem ke zmíněné podmínce) $(1, \infty)$. Jediná možnost, jak toto řešení „prodloužit“, je užít nulového řešení na intervalu $(-1, 1)$, neboť řešení musí být nerostoucí a liché. Vzhledem k nulovosti derivace funkce $(x-1)^2$ v bodě 1 jde skutečně o řešení na intervalu $(-1, \infty)$. Z požadavku lichosti pak plyne, že jediným maximálním lichým řešením splňujícím podmínku $y(2) = 1$ může být funkce $y(x)$ rovná $(x-1)^2$ na $(1, \infty)$, nule na $[-1, 1]$ a $-(x-1)^2$ na $(-\infty, -1)$. Vzhledem k řečenému je popsaná funkce řešením na $\mathbb{R}$.

■

P ř í k l a d   Najděte všechna maximální sudá řešení úlohy

$$xy' = ky,\ y(1) = 1,$$

kde k je (kladné) přirozené číslo.

Řešení. K tomu, abychom mohli převést úlohu na rovnici se separovanými proměnnými ve výše uvedeném smyslu, uvažujme zatím jen ta řešení $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, která nenabývají nulovou hodnotu a pro která interval (a,b) neobsahuje nulu. Takové řešení splňuje rovnici $y'\frac{1}{y} = k\frac{1}{x}$, a tedy musí splňovat rovnost $\log|y| = k\log|x| + c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ na (a, b). Proto je „maximálně“ $y(x) = \pm e^c x^k$ na $(0, \infty)$ nebo na $(-\infty, 0)$. Řešení, které by nabývalo v nějakém bodě x_0 nulu musí mít v tomto bodě nulovou derivaci nebo aspoň vlastní derivaci, je-li $x_0 = 0$. Protože jediným bodem, kde mají nalezená nenulová řešení limitu nula je bod nula, zajímá nás druhý případ. Jedinou sudou funkcí splňující $y(1) = 1$ a $y(x) = \pm e^c x^k$ na intervalu $(0, \infty)$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ je funkce $y(x) = |x|^k$. Ta se na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ rovná některým z nalezených řešení a v nule má vlastní derivaci, právě když $k \geq 2$. Pro $k = 1$ tedy hledané (maximální) řešení neexistuje a pro $k \geq 2$ je jím funkce $y(x) = |x|^k$. ■

P ř í k l a d Najděte všechna maximální řešení úlohy

$$(\cos^2 x)y' = \cos^2 y, \ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}.$$

Řešení. Všimneme si, že konstantní funkce $y(x) = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, jsou řešení na $\mathbb{R}$, a budeme dále hledat řešení $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, která nenabývají žádnou z hodnot $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a pro která interval (a, b) neobsahuje žádný z bodů $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pak jde o řešení rovnice $\frac{y'}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 x}$, a řešení $y(x)$ musí proto splňovat rovnost $\operatorname{tg} y(x) = \operatorname{tg} x + c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Platí tedy, že $y(x) = n\pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + c)$ na některém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro nějaké n celé. Toto řešení má v pravém krajním bodě definičního intervalu limitu $n\pi + \frac{\pi}{2}$ zleva a v levém krajním bodě téhož intervalu má limitu zprava $n\pi - \frac{\pi}{2}$. Příslušné jednostranné derivace jsou rovny jedné (ověřte podrobně). Z toho vyplývá, že každá funkce $y_{n,(c_k; k\in\mathbb{Z})}$, $n \in \mathbb{Z}$, $c_k \in \mathbb{R}$, definovaná předpisem

$y_{n,(c_k)}(x) = n\pi + k\pi + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + c_k)$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
a $y_{n,(c_k)}(\frac{\pi}{2} + k\pi) = n\pi + k\pi + \frac{\pi}{2}$ pro $k \in \mathbb{Z}$

je maximálním řešením rovnice a pro $n = 0$ řeší naši počáteční úlohu. Dalším řešením je funkce, která se rovná $\frac{\pi}{2}$ na $\mathbb{R}$. Vzhledem k tomu, že tato má derivaci (v bodě $\frac{\pi}{2}$) nulovou a funkce $y_{0,(c_k)}$ mají v bodě $\frac{\pi}{2}$ derivaci nenulovou, jsou výše popsaná řešení všechna maximální řešení úlohy.

■

Řadu diferenciálních rovnic lze vhodnou záměnou proměnných převést na typ rovnice, který již řešit umíme. Jako příklad mohou sloužit tzv. homogenní rovnice tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$.

P ř í k l a d Najděte řešení rovnice

$$2xyy' = 3y^2 - x^2,$$

které splňuje podmínku $y(2) = 6$ a je definováno na maximálním možném intervalu.

Řešení. Pro x nenulová, t.j. buď z intervalu $(0,\infty)$, nebo z intervalu $(-\infty,0)$, přepišme rovnici do tvaru
$$2\frac{y}{x}y' = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1.$$
(Nebudeme rovnici převádět na homogenní rovnici ve výše naznačeném smyslu, abychom se vyhnuli diskusi případu $y=0$.) Zavedeme novou neznámou funkci $z=\frac{y}{x}$. Platí tedy $y' = z + xz'$ a dosazením do rovnice dostáváme $2z(z+xz') = 3z^2-1$, a konečně
$$2zxz' = z^2 - 1.$$
Budeme-li se zabývat řešením na intervalu, na kterém nenastane rovnost $|z|=1$, tj. $|y|=|x|$, pak jde o rovnici se separovanými proměnnými
$$\frac{2z}{z^2-1}z' = \frac{1}{x}.$$
Standardním postupem dostáváme, že $\log|z^2-1| = \log|x| + c$ pro $c\in\mathbb{R}$ na definičním intervalu funkce $z(x)$, tedy $|z^2-1| = |x|d$ pro nějaké $d>0$. Nutně platí, že $|z| = \sqrt{1+xd}$ pro nějaké $d\neq 0$. Hodnota $d=0$ vede k řešením $z(x)=1$ a $z(x)=-1$, která jsme neuvažovali, ale která zřejmě rovnici splňují. Přejděme nyní k rovnici pro y. Dostáváme, že funkce $y(x) = \pm x\sqrt{1+dx}$ je řešením na intervalech, kde $x>0$ nebo $x<0$ a kde $|1+dx|\neq 1$, pokud d není nulové. Má-li být splněna podmínka $y(2)=6$, je $y(x) = x\sqrt{1+4x}$ pro $x>0$. Derivace funkce $\sqrt{1+4x}$ v nule je rovna jedné, a proto je řešením i na intervalu $(-\frac14,\infty)$. V bodě $-\frac14$ má zprava derivaci $+\infty$, a tedy jde o maximální řešení. Funkce $y(x)=x$ je ovšem též řešením s derivací jedna v nule (jde o řešení, které odpovídá $z(x)=1$), a tedy hledané řešení $y(x)$ je rovno x pro $x\le 0$ a $x\sqrt{1+4x}$ pro $x>0$. To je definováno na celém $\mathbb{R}$, a jde tedy zřejmě o maximální možný interval, na kterém jsme řešení mohli nalézt. ■

§30. Lineární rovnice prvního řádu jsou rovnice tvaru $y' + p(x)y = q(x)$. Ukážeme si, jak hledat řešení na otevřených intervalech, na nichž jsou funkce p a q spojité. V případě, že $q=0$ jde o speciální případ rovnic se separovanými proměnnými z §29. Toho nyní nevyužijeme, nicméně to dává možnou metodu řešení naznačenou níže v §33.

P ř í k l a d Řešte rovnici $xy' + y = \sin x$.

Řešení. Všimněme si, že levou stranu rovnice lze zapsat ve tvaru derivace součinu:
$$(xy)' = \sin x.$$
Jinak vyjádřeno, $xy = -\cos x + C$, kde C je nějaká konstanta. Řešením jsou tedy funkce $y(x) = \frac{C-\cos x}{x}$, $x\in(0,\infty)$ nebo $x\in(-\infty,0)$, kde $C\in\mathbb{R}$ je libovolné. ■

Poznamenejme, že uvedená řešení jsou pro $C\neq 1$ maximální, protože v bodě 0 zprava (zleva) mají nevlastní limitu. Tak tomu však není pro $C=1$, kdy lze „lepit". Tím dostaneme maximální řešení $y(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Rovnice v předchozím příkladu nebyla ve tvaru uvedeném na počátku tohoto paragrafu (pro $x \neq 0$ ji lze na tento tvar převést vydělením x). Byla však ve tvaru, který umožnil rychlé vyřešení rovnice. Každou lineární rovnici prvního řádu můžeme na takový tvar převést vynásobením vhodnou funkcí, tzv. *integračním faktorem*. Pro rovnici $y' + p(x)y = q(x)$ je integrační faktor roven $e^{P(x)}$, kde P je primitivní funkce k p. Všimněme si, že integrační faktor je vždy nenulový, a tedy vynásobíme-li jím rovnici, jde o ekvivalentní úpravu (na intervalech spojitosti funkce p). Po vynásobení lze levou stranu rovnice zapsat jako $(ye^{P(x)})'$. I tento přepis je ekvivalentní úpravou, protože $e^{P(x)}$ je nenulová funkce mající vlastní derivaci, a tedy y' existuje, právě když $(ye^{P(x)})'$ existuje.

Příklad Řešte rovnici $y' + xy = 1$.

Řešení. Máme $p(x) = x$, za primitivní funkci lze tedy vzít $P(x) = \frac{1}{2}x^2$. Po vynásobení integračním faktorem má rovnice tvar $y'e^{x^2/2} + xe^{x^2/2}y = e^{x^2/2}$, neboli $\left(ye^{x^2/2}\right)' = e^{x^2/2}$. To je ekvivalentní s tím, že pro nějakou konstantu $C \in \mathbb{R}$ platí rovnost $ye^{x^2/2} = C + \int_0^x e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$. Výraz na pravé straně je primitivní funkce k funkci $e^{x^2/2}$, kterou neumíme lépe vyjádřit. Řešeními jsou tedy funkce tvaru $y(x) = e^{-x^2/2}\left(C + \int_0^x e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t\right)$, $x \in \mathbb{R}$, kde C je libovolná konstanta. ■

§31. Diferenciálních rovnic, které lze řešit tím, že si levou stranu vyjádříme jako derivaci vhodného výrazu, je více. Patří k nim **exaktní rovnice**.

Příklad Řešte rovnici $1 + e^{x+y} + y'e^{x+y} = 0$.

Řešení. Rovnici přepíšeme ve tvaru $(x + e^{x+y})' = 0$. Funkce $y(x)$ je tedy řešením rovnice na intervalu I, právě když existuje $C \in \mathbb{R}$, že na I platí $x + e^{x+y(x)} = C$. Odtud lze vyjádřit $y(x) = -x + \log(C - x)$, $x \in (-\infty, C)$. ■

Příklad Řešte rovnici $y'(1 + e^{x+y}) + e^{x+y} = 0$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0$.

Řešení. Rovnici přepíšeme ve tvaru $(y + e^{x+y})' = 0$. Existuje tedy $C \in \mathbb{R}$, že řešení splňuje $y + e^{x+y} = C$. Z této rovnosti ovšem neumíme vyjádřit y, musíme se s ní tedy spokojit. I z ní však můžeme získat dostatek informací o řešení – o jeho existenci a vlastnostech, například s využitím věty o implicitní funkci (viz §76). Má-li řešení splňovat navíc počáteční podmínku $y(0) = 0$, musí být $C = 0 + e^{0+0} = 1$. Hledané řešení splňuje tedy rovnici $y(x) + e^{x+y(x)} = 1$. ■

K tomu, abychom poznali, zda pro rovnici tvaru $y'f(x, y) + g(x, y) = 0$ lze levou stranu zapsat jako derivaci funkce $F(x, y(x))$ pro vhodnou funkci F, slouží následující věta.

Nechť funkce $f(x,y)$ a $g(x,y)$ mají na obdélníku $(a,b)\times(c,d)$ spojité parciální derivace prvního řádu. Pak existuje funkce $F(x,y)$ definovaná na $(a,b)\times(c,d)$ taková, že $\frac{\partial F}{\partial y}=f$ a $\frac{\partial F}{\partial x}=g$, právě když $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y}$.

Implikace $\Rightarrow$ plyne z věty o záměnnosti parciálních derivací, viz např. [D2, Věta 191]. Obrácená implikace je snadná, zkuste si ji dokázat sami s použitím metody řešení následujícího příkladu.

<u>Příklad</u> Řešte rovnici $1+(1+xy)e^{xy}+(1+x^2e^{xy})y'=0$

Řešení. Máme $f(x,y)=1+x^2e^{xy}$ a $g(x,y)=1+(1+xy)e^{xy}$. Na celém $\mathbb{R}^2$ platí $\frac{\partial f}{\partial x}=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}=\frac{\partial g}{\partial y}$. Existuje tedy funkce $F(x,y)$ na $\mathbb{R}^2$, pro kterou $\frac{\partial F}{\partial y}=f$ a $\frac{\partial F}{\partial x}=g$. Najděme ji.

Jest $\frac{\partial F}{\partial y}=1+x^2e^{xy}$, tedy $F(x,y)=y+xe^{xy}+C(x)$, kde $C(x)$ je nějaká funkce nezávisející na y. Pak ovšem $\frac{\partial F}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}+C'(x)$. Protože $\frac{\partial F}{\partial x}=g$, dostáváme $C'(x)=1$, tedy $C(x)=x+D$, kde D je konstanta. Můžeme tudíž položit $F(x,y)=x+y+xe^{xy}$.

Řešení $y(x)$ naší rovnice tedy splňují $(x+y(x)+xe^{xy(x)})'=0$, ekvivalentně $x+y(x)+xe^{xy(x)}=c$, kde c je nějaká konstanta. Podobně jako v předchozím příkladu neumíme vyjádřit řešení y explicitně. ■

§32. Když rovnice $y'f(x,y)+g(x,y)=0$ není exaktní, lze ji vynásobit **integračním faktorem**, aby se exaktní stala. V některých případech lze tento integrační faktor i nalézt. O některých z těchto případů hovoří následující věta, jejíž důkaz je snadný.

Pokud $\frac{\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}}{f}$ nezávisí na y, pak pro rovnici $y'f(x,y)+g(x,y)=0$ existuje integrační faktor, který je funkcí x. Pokud $\frac{\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}}{g}$ nezávisí na x, pak existuje integrační faktor, který je funkcí y.

<u>Příklad</u> Řešte rovnici $3xy+y^2+(x^2+xy)y'=0$.

Řešení. Máme $f(x,y)=x^2+xy$ a $g(x,y)=3xy+y^2$. Jest $\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y$, $\frac{\partial g}{\partial y}=3x+2y$ a $\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}=-x-y$. Existuje tedy integrační faktor $p(x)$. Pro něj musí platit $\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)p(x))=\frac{\partial}{\partial y}(g(x,y)p(x))$, tedy

$$p(x)(2x+y)+p'(x)(x^2+xy)=p(x)(3x+2y),$$

neboli

$$p'(x)(x^2+xy)-p(x)(x+y)=0.$$

Vydělíme-li rovnici $x+y$ (nyní se nezabýváme ekvivalentností úprav, protože hledáme libovolné p tuto rovnici splňující), dostaneme lineární rovnici prvního řádu $p'x-p=0$, jejímž řešením je například $p(x)=x$ (to buď uhodneme nebo najdeme postupem dle §30).

Rovnice $3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0$ je již exaktní. Opět najdeme příslušnou funkci F. Má platit $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + xy^2$, tedy $F(x, y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y)$. Pak $\frac{\partial F}{\partial y} = x^3+x^2y+C'(y)$, tedy $C'(y) = 0$. Rovnici se nám tedy podařilo převést na tvar $x^3y(x) + x^2y(x)^2 = c$, kde c je konstanta. V tomto případě bychom mohli i vyjádřit $y(x)$ explicitně a diskutovat intervaly, na kterých je řešením, to však necháme na čtenáři. ■

§33. Obecné vlastnosti lineárních zobrazení lze využít při řešení **lineárních diferenciálních rovnic n-tého řádu**. To jsou rovnice tvaru

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Funkcím $a_1, \ldots , a_n$ říkáme koeficienty a funkci f pravá strana. V případě, že $f = 0$, mluvíme o homogenní rovnici. Důležitý nástroj řešení je obsažen v následující větě.

Nechť funkce $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ a $f(x)$ jsou spojité na intervalu (α, β). Pro funkci y, která má na (α, β) spojitou n-tou derivaci, položme

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y.$$

Pak všechna maximální řešení rovnice $L(y) = f$ jsou definována na celém intervalu (α, β). Navíc platí:

- *Množina všech maximálních řešení (homogenní) rovnice $L(y) = 0$ tvoří vektorový prostor dimenze n.*
- *Je-li y_0 jedno maximální řešení (nehomogenní) rovnice $L(y) = f$, pak množina všech jejích maximálních řešení je tvořena všemi funkcemi tvaru y_0+y_h, kde y_h je maximální řešení homogenní rovnice.*

Poznamenejme, že vektorovým prostorem rozumíme vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Zajímají nás totiž reálná řešení. Nicméně někdy je užitečné se zabývat i komplexními řešeními – k tomu je třeba si uvědomit, že komplexní funkce (reálné proměnné) se derivuje tak, že derivujeme zvlášť reálnou a imaginární část. I v této situaci zůstává předchozí věta v platnosti s tím, že uvažujeme komplexní vektorové prostory. To však nebude předmětem našeho zájmu.

Předchozí věta umožňuje řešení lineárních rovnic ve dvou krocích. Prvním krokem je nalezení báze prostoru řešení homogenní rovnice (tzv. fundamentálního systému) a druhým nalezení jednoho řešení nehomogenní rovnice (tzv. partikulárního řešení). V tomto paragrafu to ilustrujeme na lineární rovnici prvního řádu. Přitom ukážeme použití metody **variace konstanty**, což je speciální případ obecnější metody popsané v §38. Lineárním rovnicím vyšších řádů se budeme věnovat v následujících paragrafech.

Příklad Řešte rovnici $y' - 4xy = x^7$.

Řešení. Jde o lineární rovnici prvního řádu, jejíž koeficient i pravá strana jsou funkce spojité na $\mathbb{R}$. Řešení budou tudíž definována také na $\mathbb{R}$. Řešme nejprve homogenní rovnici $y' - 4xy = 0$. To je rovnice se separovanými proměnnými, a tak můžeme aplikovat metodu z §29.

Přepišme rovnici ve tvaru $y' = 4xy$. Vidíme, že $y = 0$ na $\mathbb{R}$ je jediné stacionární řešení a že řešení, která nenabývají hodnoty 0 splňují $y'/y = 4x$, neboli $(\log|y|)' = 4x$. Tedy $\log|y| = 2x^2 + c$, kde c je nějaká konstanta. Odtud dostaneme

$$|y| = e^{2x^2+c} = e^c e^{2x^2} = ke^{x^2},$$

kde k je kladná konstanta. Uvážíme-li možnost, že $y > 0$ nebo $y < 0$, vychází $y = ke^{x^2}$, kde k je nenulová konstanta. Zahrneme-li stacionární řešení, dostáváme, že řešením jsou právě všechny násobky funkce e^{x^2}. Všimněme, si že tvoří skutečně vektorový prostor dimenze 1.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice lze najít metodou variace konstanty. To znamená, že ho hledáme ve tvaru $y_0(x) = k(x)y_h(x)$, kde y_h je pevně zvolené nenulové řešení homogenní rovnice a $k(x)$ je vhodná funkce. To jest, hledáme funkci $k(x)$ takovou, aby funkce $y_0 = k(x)e^{2x^2}$ byla řešením. Dosadíme-li toto do původní rovnice, dostaneme $k'(x)e^{2x^2} + k(x) \cdot 4xe^{2x^2} - 4xk(x)e^{4x^2} = x^7$, neboli $k'(x) = x^7e^{-2x^2}$. Zbývá spočítat $\int x^7e^{2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{32}\int(-2x^2)^3e^{-2x^2}\cdot(-4x)\,\mathrm{d}x$. Provedeme-li substituci $t = -2x^2$ (první věta o substituci, viz §4), dostáváme $\frac{1}{32}\int t^3e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}(t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t + \mathbf{C}$ (viz §3, strana 13). Za partikulární řešení lze tedy vzít $y_0(x) = -\frac{1}{32}(8x^6 + 12x^4 + 12x^2 + 6)$.

Obecné řešení má pak tvar $y(x) = -\frac{1}{32}(8x^6 + 12x^4 + 12x^2 + 6) + ce^{2x^2}$. ■

Poznámka. Pro řešení lineárních rovnic prvního řádu je jistě rychlejší metoda integračního faktoru z §30, kterou však nelze bezprostředně rozšířit na lineární rovnice vyšších řádů. Doporučujeme proto čtenáři ovládnout i metodu variace konstanty z tohoto paragrafu, neboť tu naopak lze na lineární rovnice vyšších řádů zobecnit.

§34. Hledání fundamentálního systému pro lineární rovnice s konstantními koeficienty. Pro homogenní lineární rovnici s konstantními koeficienty, tj. pro rovnici tvaru

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0,$$

kde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, fundamentální systém najdeme s využitím charakteristického polynomu $\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.

Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ kořenem násobnosti p charakteristického polynomu, pak funkce

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{p-1}e^{\lambda x}$$

jsou řešeními rovnice (*). Je-li $\alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kořenem násobnosti p charakteristického polynomu, pak $\alpha - i\beta$ je rovněž jeho kořenem násobnosti p a funkce

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{p-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{p-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

jsou řešeními rovnice (*)*. Navíc všechna uvedená řešení odpovídající různým kořenům s nezápornou imaginární částí tvoří fundamentální systém rovnice* (*)*.*

Poznámka. Předchozí věta má v komplexním oboru jednodušší tvar:

Uvažujme rovnici (*)*, kde* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$*. Je-li* $\lambda \in \mathbb{C}$ *kořenem násobnosti* p *charakteristického polynomu, pak funkce*

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{p-1}e^{\lambda x}$$

jsou řešeními rovnice (*)*. Navíc všechna uvedená řešení odpovídající různým kořenům tvoří fundamentální systém rovnice* (*)*.*

Poznamenejme, že komplexní funkci reálné proměnné derivujeme tak, že derivujeme zvlášť reálnou a imaginární část. Tvar fundamentálního systému pro rovnice s reálnými koeficienty dostaneme snadno z uvedeného komplexního tvaru – funkce příslušející reálným kořenům mají týž tvar a funkce příslušející kořenům s kladnou imaginární částí dostaneme jako reálnou a imaginární část příslušných prvků komplexního fundamentálního systému.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte fundamentální systém řešení rovnice $y''' + 4y'' + 3y' = 0$.

Řešení. Charakteristický polynom je $\chi(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda = \lambda(\lambda+1)(\lambda+3)$. Má tři jednoduché kořeny, a to 0, -1 a -3. Fundamentální systém tedy tvoří trojice funkcí 1, e^{-x} a e^{-3x}. ■

V rovnici z předchozího příkladu se nevyskytuje samostatně y. Dosazením $z = y'$ dostaneme z původní rovnice rovnici druhého řádu pro neznámou funkci z. Mohli bychom ji vyřešit a řešeními původní rovnice by byly primitivní funkce k nalezeným řešením. Tento postřeh je obecně užitečný, ale v našem případě by nám práci neušetřil.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte řešení rovnice $y'' + 2y' + 2y = 0$ splňující podmínky $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$.

Řešení. Nejprve nalezneme fundamentální systém. Charakteristický polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ má dva komplexně sdružené kořeny $-1+i$ a $-1-i$. Fundamentální systém tedy tvoří funkce $e^{-x}\cos x$ a $e^{-x}\sin x$. Hledané řešení musí proto mít tvar $y(x) = ae^{-x}\cos x + be^{-x}\sin x$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Z podmínky $y(0) = 0$ plyne $a = 0$. Pak $y'(x) = -be^{-x}\sin x + be^{-x}\cos x$. Z podmínky $y'(0) = 1$ dostáváme $b = 1$.

Hledané řešení je $y(x) = e^{-x}\sin x$. ■

<u>P ř í k l a d</u> Najděte všechna řešení rovnice $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

Řešení. Charakteristický polynom je $\chi(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2$. Má tedy dvojnásobný kořen i a dvojnásobný kořen $-i$. Fundamentální systém tvoří funkce $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$ a $x\sin x$, obecné řešení má tudíž tvar

$$y(x) = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x,$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. ■

P ř í k l a d Doplňte dvojici funkcí $(x^2 + x + 7)e^x$ a $\sin x$ na fundamentální systém řešení nějaké lineární rovnice s konstantními koeficienty.

Řešení. Funkce x^2e^x, xe^x, e^x, $\sin x$ a $\cos x$ tvoří fundamentální systém rovnice s charakteristickým polynomem $(\lambda-1)^3(\lambda^2+1) = \lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1$. To je rovnice $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$. Protože prostor řešení má dimenzi 5 a pětice funkcí $(x^2 + x + 7)e^x$, xe^x, e^x, $\sin x$ a $\cos x$ má stejný lineární obal jako uvedený fundamentální systém, je sama bází prostoru řešení, a tedy může posloužit jako hledaný fundamentální systém. ■

Poznamenejme, že řešení předchozího příkladu dává návod, jak dokazovat lineární nezávislost určitých systémů funkcí s využitím věty z počátku tohoto paragrafu.

§35. Je-li pravá strana lineární rovnice s konstantními koeficienty v jistém speciálním tvaru (tzv. **speciální pravá strana** nebo též **kvazipolynom**), pak existuje řešení podobného tvaru. Konkrétně platí následující věta.

Nechť $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a P_1, P_2 jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f$ ve tvaru $y(x) = x^me^{\alpha x} \cdot (Q_1(x)\sin\beta x + Q_2(x)\cos\beta x)$, kde m je násobnost čísla $\alpha + i\beta$ jako kořenu charakteristického polynomu ($m = 0$, není-li toto číslo kořenem) a Q_1, Q_2 jsou polynomy, jejichž stupeň je nejvýše roven většímu ze stupňů polynomů P_1, P_2 (za stupeň nulového polynomu můžeme v tomto případě považovat třeba -1).

P ř í k l a d Najděte alespoň jedno řešení rovnice $y'' - 6y' + 5y = e^x$.

Řešení. Použijeme předchozí větu. Jest $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $P_1(x) = 1$ (polynomem P_2 se nezabýváme, protože $\beta = 0$). Charakteristický polynom je $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5)$, číslo 1 je tedy kořenem násobnosti 1.

Existuje tedy řešení ve tvaru $y(x) = axe^x$. Neznámé číslo a je tím polynomem Q_1 stupně nejvýš 0. Zbývá určit a, což uděláme dosazením do rovnice. Je

$$y'(x) = a(x+1)e^x \quad \text{a} \quad y''(x) = a(x+2)e^x,$$

a tedy levá strana rovnice je $y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = -4ae^x$. Chceme-li, aby vyšlo e^x, musí být $a = -1/4$; řešením naší rovnice je tudíž například funkce $y(x) = -\frac{1}{4}xe^x$.
■

P ř í k l a d Najděte všechna řešení rovnice $y'' - y = x\sin x$.

Řešení. Nejprve najdeme fundamentální systém homogenní rovnice. Charakteristický polynom je $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$, fundamentální systém tvoří tedy funkce e^x a e^{-x}.

Pravá strana je ve speciálním tvaru, přitom $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_1(x) = 0$ a $P_2(x) = x$. Číslo i není kořenem charakteristického polynomu, a tak existuje řešení ve tvaru

$y_0(x) = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$. Píšeme $Q_1(x) = ax+b$ a $Q_2(x) = cx+d$, protože to mají být polynomy stupně nejvýše 1. Zbývá určit koeficienty, a tak tvar y_0 dosadíme do rovnice.

Jest

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= (cx+d+a)\cos x + (-ax-b+c)\sin x, \\ y_0''(x) &= (-ax-b+2c)\cos x + (-cx-d-2a)\sin x. \end{aligned}$$

Musí tedy platit

$$(-2ax-2b+2c)\cos x + (-2cx-2d-2a)\sin x = x\sin x.$$

Porovnáním koeficientů dostáváme soustavu rovnic (tato soustava je ekvivalentní poslednímu tvaru rovnice díky lineární nezávislosti příslušných funkcí – viz větu na počátku §34):

$$\begin{array}{rrrrl} -2a & & & & = 0 \\ & -2b & +2c & & = 0 \\ & & -2c & & = 1 \\ -2a & & & -2d & = 0. \end{array}$$

Odtud máme $a = 0$, $b = c = -1/2$, $d = 0$. Hledané partikulární řešení je tudíž $y_0(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x\sin x$.

Obecné řešení pak má tvar $y(x) = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}x\sin x + Ae^x + Be^{-x}$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. ■

§36. Důležitým typem soustav diferenciálních rovnic, pro které existuje metoda analytického řešení, jsou **soustavy lineárních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty.** To jsou soustavy tvaru $y' = A\cdot y + f(x)$, kde A je číselná matice typu $n \times n$, f je vektorová funkce (tzv. pravá strana) a y je neznámá vektorová funkce (obě reprezentované jako sloupcové vektory řádu n). V případě, že $f = 0$, mluvíme o homogenní soustavě.

Příklad Najděte všechna řešení soustavy $y' = 2y + z$, $z' = y + 2z$.

Řešení. Z první rovnice lze vyjádřit $z = y' - 2y$. Dosaďme odtud za z do druhé rovnice. Dostaneme $y'' - 2y' = y + 2(y' - 2y)$, po úpravě $y'' - 4y' + 3y = 0$. To je homogenní lineární rovnice druhého řádu s charakteristickým polynomem $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$, kořeny jsou 1 a 3. Proto všechna řešení mají tvar $y(x) = ae^x + be^{3x}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Zbývá vypočítat $z(x) = y'(x) - 2y(x) = -ae^x + be^{3x}$.

Řešením soustavy jsou tedy dvojice funkcí $y(x) = ae^x + be^{3x}$ a $z(x) = -ae^x + be^{3x}$ na celém $\mathbb{R}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. ■

V předchozím příkladu jsme řešení soustavy dvou rovnic prvního řádu převedli na řešení jedné rovnice druhého řádu a pak použili metodu z §34. Následující příklad ukazuje odlišný postup v případě, kdy nelze mechanicky aplikovat metodu z předchozího příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> Řešte soustavu $y' = 5y$, $z' = y + 4z$

Řešení. V první rovnici se nevyskytuje z, podle §30 (nebo §34) její řešení mají tvar $y(x) = ae^{5x}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je konstanta. Dosadíme-li toto do druhé rovnice, dostaneme rovnici $z' - 4z = ae^{5x}$, kterou vyřešíme podle §30. Vynásobíme integračním faktorem e^{-4x} a dostaneme $(ze^{-4x})' = ae^{x}$, tedy $ze^{-4x} = ae^{x} + b$, neboli $z(x) = ae^{5x} + be^{4x}$.

Řešením soustavy je tedy dvojice funkcí $y(x) = ae^{5x}$ a $z(x) = ae^{5x} + be^{4x}$ na celém $\mathbb{R}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. ■

Uvedené dva příklady ukazují dvě možnosti řešení soustavy dvou rovnic. Rozmyslete si, že pro každou soustavu lze alespoň jedné z nich použít. Máme-li soustavu více než dvou rovnic, lze použít určitou kombinaci uvedených dvou variant. Soustavu lze ekvivalentními úpravami převést na tvar, který umožňuje postupné řešení rovnic s jednou neznámou funkcí (součet řádů těchto rovnic bude roven počtu rovnic v soustavě). Tyto úpravy lze dělat způsobem připomínajícím Gaussovu eliminaci. Podrobné vysvětlení včetně důkazů potřebných vět lze najít v oddílu XVII.3.2 skript [JKZ] nebo též (v obecnějším kontextu) v kapitole VI knihy [G]. Tuto metodu zde popíšeme. Vyjdeme z matice $\lambda I - A$ (proměnná λ zastupuje „operátor derivování“, tato matice symbolizuje soustavu $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - A)y := y' - Ay = 0$). Nyní uvedenou matici převedeme posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou matici. Přitom řádkovými úpravami rozumíme:

a) prohození dvou řádků;

b) vynásobení řádku nenulovou konstantou;

c) přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Všimněte si, že mezi úpravami není vynásobení řádku polynomem stupně alespoň 1. Stojí za zdůraznění, že to skutečně není přípustná řádková úprava.

Vzniklou horní trojúhelníkovou matici nyní přepíšeme opět na soustavu diferenciálních rovnic. Má-li matice tvar

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

pak nová soustava bude mít tvar

$$\begin{array}{lllll} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + \;\dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & = 0 \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + \;\dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & = 0 \\ & & \vdots & & \\ & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & = 0, \end{array}$$

kde symbolem $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y$ rozumíme funkci $a_k y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$, pokud $P(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.

Poznamenejme, že polynomy na diagonále jsou všechny nenulové a součet jejich stupňů je n. To plyne ze známé věty o vztahu řádkových elementárních úprav a hodnoty determinantu. Tento fakt nám umožňuje soustavu nakonec vyřešit odzadu – poslední rovnice je rovnice s neznámou y_n, tu vyřešíme a její řešení dosadíme do předchozích rovnic. V předposlední pak zůstane jako neznámá y_{n-1}, vyřešíme ji a dosadíme do předchozích a takto pokračujeme až k první rovnici.

Takto jsme popsali řešení homogenní soustavy. V případě, že soustava není homogenní a pravá strana je dostatečně hladká, můžeme postupovat podobně. K matici $\lambda I - A$ přidáme ještě sloupec pravých stran a upravujeme takto rozšířenou matici. Po úpravě budou prvky posledního sloupce součty výrazů tvaru $\lambda^k h(x)$, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a h je funkce proměnné x. Při opětném přepisu na soustavu diferenciálních rovnic výraz $\lambda^k h(x)$ nahradíme výrazem $h^{(k)}(x)$. To odpovídá povaze řádkových úprav (srovnejte s řešením posledního příkladu tohoto paragrafu). Ukážeme si to na soustavě dvou rovnic.

<u>Příklad</u> Řešte soustavu $u' = -u + 2v + \sin x$, $v' = -2u + 3v + \cos x$.

Řešení. Podle předchozího odstavce upravujeme matici (zde i dále symbolem $\overset{a}{\sim}$ značíme použití řádkové úpravy a), podobně pro $\overset{b}{\sim}$ a $\overset{c}{\sim}$):

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & \sin x \\ 2 & \lambda-3 & \cos x \end{pmatrix} \overset{a}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & \lambda-3 & \cos x \\ \lambda+1 & -2 & \sin x \end{pmatrix} \overset{c}{\sim}$$

$$\overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & \lambda-3 & \cos x \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda-\frac{1}{2} & \sin x - \frac{1}{2}\lambda\cos x - \frac{1}{2}\cos x \end{pmatrix}.$$

Tím dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 2u + v' - 3v &= \cos x, \\ -\frac{1}{2}v'' + v' - \frac{1}{2}v &= \sin x - \frac{1}{2}(\cos x)' - \frac{1}{2}\cos x. \end{aligned}$$

Druhou rovnici lze přepsat ve tvaru $v'' - 2v' + v = \cos x - 3\sin x$. To je nehomogenní rovnice druhého řádu. Charakteristický polynom je $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$, fundamentální systém řešení homogenní rovnice tvoří funkce e^x a xe^x (viz §34).

Pravá strana je ve speciálním tvaru (ve smyslu §35), partikulární řešení existuje ve tvaru $v_0 = a\cos x + b\sin x$. Pak $v_0' = b\cos x - a\sin x$ a $v_0'' = -a\cos x - b\sin x$. Po dosazení dostáváme $-2b\cos x + 2a\sin x = \cos x - 3\sin x$. Odtud $b = -1/2$ a $a = -3/2$, obecné řešení tedy vypadá

$$v(x) = -\frac{3}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x + (cx+d)e^x.$$

Z první rovnice dopočítáme $u = \frac{1}{2}(\cos x - v' + 3v)$, tedy

$$u(x) = -\frac{3}{2}\cos x - \frac{3}{2}\sin x + (cx + d - \frac{c}{2})e^x.$$

■

<u>Příklad</u> Řešte soustavu $u' = v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + v$.

Řešení. Hledejme řešení v pořadí u, v, w. Matice soustavy je pak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

budeme tedy postupně upravovat matici $\lambda I - A$ pomocí řádkových úprav:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \overset{a}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1+\lambda^2 & -1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix} \overset{a}{\sim}$$

$$\overset{a}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda+1 \\ 0 & -1+\lambda^2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda-2 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy soustavu $-u+v'-w=0$, $-v'-v+w'+w=0$, $w''-w'-2w=0$. Poslední rovnice má charakteristický polynom $\lambda^2-\lambda-2$, jehož kořeny jsou 2 a -1, řešení je tedy $w(x) = ae^{2x} + be^{-x}$ (viz §34). Druhá rovnice bude mít nyní tvar $v' + v = w' + w = 3ae^{2x}$. Postupujme dle §30: $(ve^x)' = 3ae^{3x}$, tedy $ve^x = ae^{3x} + c$, neboli $v(x) = ae^{2x} + ce^{-x}$. Zbývá z první rovnice dopočítat $u = v' - w = ae^{2x} - (b+c)e^{-x}$.

Řešením je tedy trojice funkcí

$$\begin{aligned} u(x) &= ae^{2x} - (b+c)e^{-x}, \\ v(x) &= ae^{2x} + ce^{-x}, \\ w(x) &= ae^{2x} + be^{-x} \end{aligned}$$

na $\mathbb{R}$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. ■

Poznamenejme, že popsanou eliminaci lze dělat přímo, bez použití maticového zápisu. Můžeme řádkové úpravy provádět přímo s rovnicemi - pak tyto úpravy jsou: prohození dvou rovnic, vynásobení rovnice nenulovou konstantou a přičtení reálného násobku rovnice nebo její k-té derivace k jiné rovnici. Při větším počtu rovnic je však výhodnější použít maticový zápis a symboliku polynomů. Přímý postup si ukážeme v následujícím příkladu (kde úpravy značíme opět písmeny a, b, c – podle analogie s výše uvedenými řádkovými úpravami matic).

<u>P ř í k l a d</u> Řešte soustavu $u' = u - v + w$, $v' = -u + 2v + 2w$, $w' = -2u + v + 3w$.

Řešení. Provádějme řádkové úpravy se soustavou:

$$\begin{array}{r} u'-u+v-w=0 \\ u+v'-2v-2w=0 \\ 2u-v+w'-3w=0 \end{array} \overset{a}{\sim} \begin{array}{r} u+v'-2v-2w=0 \\ u'-u+v-w=0 \\ 2u-v+w'-3w=0 \end{array} \overset{c}{\sim} \begin{array}{r} u+v'-2v-2w=0 \\ u'+v'-v-3w=0 \\ -2v'+3v+w'+w=0 \end{array} \overset{c}{\sim}$$

$$\overset{c}{\sim} \begin{array}{r} u+v'-2v-2w=0 \\ -v''+3v'-v+2w'-3w=0 \\ -2v'+3v+w'+w=0 \end{array} \overset{c}{\sim} \begin{array}{r} u+v'-2v-2w=0 \\ \frac{3}{2}v'-v-\frac{1}{2}w''+\frac{3}{2}w'-3w=0 \\ -2v'+3v+w'+w=0 \end{array} \overset{c}{\sim}$$

$$\begin{aligned} u + v' - 2v - 2w &= 0 \\ \overset{c}{\sim}\ \tfrac{5}{4}v - \tfrac{1}{2}w'' + \tfrac{9}{4}w' - \tfrac{9}{4}w &= 0 \\ -2v' + 3v + w' + w &= 0 \end{aligned} \quad \overset{c}{\sim} \quad \begin{aligned} u + v' - 2v - 2w &= 0 \\ \tfrac{5}{4}v - \tfrac{1}{2}w'' + \tfrac{9}{4}w' - \tfrac{9}{4}w &= 0 \\ 3v - \tfrac{4}{5}w''' + \tfrac{18}{5}w'' - \tfrac{13}{5}w' + w &= 0 \end{aligned} \quad \overset{c}{\sim}$$

$$\overset{c}{\sim} \quad \begin{aligned} u + v' - 2v - 2w &= 0 \\ \tfrac{5}{4}v - \tfrac{1}{2}w'' + \tfrac{9}{4}w' - \tfrac{9}{4}w &= 0 \\ -\tfrac{4}{5}w''' + \tfrac{24}{5}w'' - 8w' + \tfrac{32}{5}w &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnici můžeme zapsat jako $w'''-6w''+10w'-8w = 0$. Charakteristický polynom je $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$, jeho kořeny jsou 4 a $1 \pm i$. Řešení má tedy tvar $w(x) = ae^{4x} + e^x(b\cos x + c\sin x)$. Z druhé rovnice dostáváme $v = \frac{2}{5}w'' - \frac{9}{5}w' + \frac{9}{5}w$, tedy $v(x) = ae^{4x} + e^x(b\sin x - c\cos x)$. Nakonec z první rovnice je $u = -v' + 2v + 2w$, tedy $u(x) = e^x((b-c)\cos x + (b+c)\sin x)$. ■

Postup řešení v předchozím příkladu je poněkud méně přehledný. To svědčí o výhodnosti maticového zápisu – práce s polynomy je pohodlnější než práce s diferenciálními operátory. Pro soustavy dvou rovnic mezi oběma postupy není podstatnějšího rozdílu, jak je zřejmé z uvedených příkladů.

Nakonec poznamenejme, že existuje jiná často uváděná metoda řešení soustav s konstantními koeficienty. Spočívá na pozorování, že je snadné vyřešit soustavu, jejíž matice je v Jordanově tvaru, a že každou soustavu lze vhodnou substitucí na takový tvar převést. Nicméně tento převod je zdlouhavý a pro matice vyššího řádu obtížně popsatelný. Navíc tento tvar může obsahovat i imaginární čísla, což dále prodlužuje postup řešení. Námi uvedená a používaná metoda využívá jeden krok postupu hledání Jordanova kanonického tvaru – úpravu matice $\lambda I - A$ na horní trojúhelníkovou matici. A to je právě vše, co je třeba, není nutné hledání Jordanova tvaru dokončovat, stačí využít znalosti řešení jedné rovnice vyššího řádu.

Podrobný výklad o Jordanově tvaru a jeho užití na řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty lze nalézt v kapitole IV skript [B].

§37. Zmíněný převod na Jordanův tvar využívá vlastní čísla, vlastní vektory a jim příslušné řetězce. V případě, že všechna vlastní čísla jsou jednoduchá (násobnosti jedna) a reálná, je i tento postup jednoduchý. Popisuje ho následující věta.

Je-li $y' = Ay$ soustava lineárních diferenciálních rovnic, kde matice A je řádu n s navzájem různými vlastními čísly $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, pak řešení mají tvar

$$y(x) = D \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ a_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}),$$

kde D je matice, která má, pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$, v j-tém sloupci vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_j.

P ř í k l a d Řešte soustavu $u' = 10u + 3v + 6w$, $v' = -11u - 4v - 12w$, $w' = u + v + 4w$.

Řešení. Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 \\ -11 & -4 & -12 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Nejprve najděme vlastní čísla matice A. Charakteristický polynom je

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 23\lambda - 14.$$

Jeho kořeny jsou 1, 2 a 7 (umíme je jednoduše najít, protože jsou celočíselné). To jsou tedy vlastní čísla matice A.

Dále najděme vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním číslům. Najdeme je vyřešením tří soustav lineárních rovnic – vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 je řešením soustavy $(I - A)y = 0$, vlastní vektor příslušný číslu 2 je řešením soustavy $(2I - A)y = 0$, podobně pro číslo 7.

Vlastní vektor příslušný číslu 1 vyjde $(1, -7, 2)$, vlastní vektor příslušný číslu 2 je $(0, -2, 1)$ a vlastní vektor příslušný číslu 7 je $(1, -1, 0)$. (Vlastní vektory příslušné jednoduchému vlastnímu číslu tvoří jednorozměrný vektorový prostor bez nulového vektoru, vybrat můžeme libovolný, obvykle zvolíme takový, jehož tvar je co nejjednodušší.)

Nyní utvořme matici $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, jejíž sloupce tvoří nalezené vlastní vektory. Tvar řešení soustavy je tedy $\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} ae^x x \\ be^{2x} \\ ce^{7x} \end{pmatrix}$, neboli

$$\begin{aligned} u(x) &= ae^x + ce^{7x}, \\ v(x) &= -7ae^x - 2be^{2x} - ce^{7x}, \\ w(x) &= 2ae^x + be^{2x} \end{aligned}$$

pro $x \in \mathbb{R}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$. ■

Jinou možností než přímý výpočet vlastních vektorů, je hledat matici D tak, aby vektorové funkce $y = D \begin{pmatrix} a_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ a_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, byly řešením. Jde o speciální případ tzv. „metody neurčitých koeficientů“, která je v obecnějším kontextu popsána v [B, Věta 20.3]. Její použití ilustruje následující příklad.

<u>P ř í k l a d</u> Řešte soustavu $u' = u + 3v$, $v' = 2u + 2v$.

Řešení. Matice soustavy je $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Je $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$. Vlastní čísla jsou tedy -1 a 4.

Řešení má proto tvar $u(x) = apxe^{-x} + bqe^{4x}$, $v(x) = are^{-x} + bse^{4x}$ pro $x \in \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$), pro vhodnou volbu $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Jaká volba je vhodná, zjistíme dosazením těchto vztahů do původních rovnic. Pak dostáváme

$$
\begin{aligned}
-ape^{-x} + 4bqe^{4x} &= a(p+3r)e^{-x} + b(q+3s)e^{4x},\\
-are^{-x} + 4bse^{4x} &= a(2p+2r)e^{-x} + b(2q+2s)e^{4x}.
\end{aligned}
$$

Tyto rovnice mají platit pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každou volbu $a, b \in \mathbb{R}$. Tedy $-p = p+3r$, $4q = q + 3s$, $-r = 2p + 2r$, $4s = 2q + 2s$. První a třetí rovnice dávají $-2p = 3r$, druhá a čtvrtá dávají $q = s$. Možnou volbou je tedy $p = 3$, $q = 1$, $r = -2$, $s = 1$.

Řešení naší soustavy mají tudíž tvar $u(x) = 3ae^{-x} + be^{4x}$, $v(x) = -2ae^{4x} + be^{4x}$ pro $x \in \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). ■

Poznámka. Metoda z tohoto paragrafu je pro případ jednoduchých reálných vlastních čísel téměř stejně jednoduchá jako metoda eliminace, třebaže navíc vyžaduje výpočet vlastních vektorů. Hlavní nevýhodou je ovšem skutečnost, že předem nevíme, zda zadaná matice A má jednoduchá vlastní čísla. To však lze zjistit bez časové ztráty následovně.

Pro výpočet vlastních čísel matice A je třeba najít kořeny polynomu $\det(\lambda I - A)$. Tento determinant můžeme počítat metodou eliminace. Pomocí uvedených řádkových úprav matici $\lambda I - A$ převedeme na horní trojúhelníkovou. Determinant této matice bude reálným nenulovým násobkem $\det(\lambda I - A)$, a tudíž bude mít stejné kořeny. Ty spočteme a podle výsledku se rozhodneme, zda budeme počítat vlastní vektory či postupovat dále metodou eliminace. Tím nic neztratíme, protože ony kořeny bychom počítali, i kdybychom rovnou použili metodu eliminace, jelikož jde o kořeny charakteristických polynomů vzniklých rovnic vyššího řádu.

§38. Variace konstant. Na několika příkladech si ukážeme, jak lze řešit lineární diferenciální rovnice či jejich soustavy s nenulovou pravou stranou tzv. metodou variace konstant, známe-li všechna řešení příslušné homogenní rovnice. Jeden příklad řešený touto metodou jsme již uvedli v §33.

Řešíme-li soustavu lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$
(\mathfrak{b}) \qquad y' \ (= (y_1', \ldots, y_n')^T) \ = \ A(x)y + \boldsymbol{b}(x),
$$

kde $A(x)$ je matice typu $n \times n$ a $\boldsymbol{b}(x)$ je (sloupcový) vektor v $\mathbb{R}^n$, jejichž prvky jsou spojité funkce na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, a je-li matice $Y(x)$, $x \in (a, b)$, typu $n \times n$ tvořena sloupci $(y_i(x), \ldots, y_i(x))^T$, $i = 1, \ldots, n$, které tvoří basů lineárního prostoru všech řešení homogenní rovnice $y' = Ay$, pak existuje („partikulární“) řešení rovnice $(\mathfrak{b})$ které je tvaru $y(x) = Y(x)c(x)$, kde $c(x)$ je vektor, jehož složky jsou diferencovatelné funkce na $x \in (a, b)$.

Dosazením zjistíme, že to znamená, že $c(x)$ je řešením soustavy rovnic, která má maticový zápis

$$
(\mathfrak{c}) \qquad Yc' = \boldsymbol{b}.
$$

Protože $Y(x)$ je regulární pro všechna $x \in (a, b)$, vede řešení na úlohu hledání primitivních funkcí ke složkám vektorové funkce $Y^{-1}(x)\boldsymbol{b}(x)$.

P ř í k l a d Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$(\cos^2 x)y' - y = e^{\operatorname{tg} x},$$

která splňují počáteční podmínku $y(0) = 1$.

Řešení. Maximální interval, na kterém má rovnice smysl a který obsahuje nulu, je interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Na něm jde o lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} y + \frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x}.$$

Označme $\boldsymbol{b}(x) = \frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x}$. Všechna řešení homogenní rovnice $y' = \frac{1}{\cos^2 x} y$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ jsou tvaru $ce^{\operatorname{tg} x}$, kde c je libovolná reálná konstanta (odvoďte postupem vyloženým v §29). Uvažujeme-li namísto konstanty c funkci $c(x)$, dostáváme po dosazení do naší lineární diferenciální rovnice, že

$$c(x)\frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x} + c'(x)e^{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\cos^2 x} c(x)e^{\operatorname{tg} x} + \boldsymbol{b}(x).$$

Díky tomu, že funkce $e^{\operatorname{tg} x}$ řeší příslušnou homogenní rovnici, platí rovnost

$$c'(x)e^{\operatorname{tg} x} = \boldsymbol{b}(x),$$

kterou jsme mohli též napsat ihned po vyřešení homogenní rovnice, pokud bychom si pamatovali výše uvedený vzorec ($\mathfrak{c}$) a uvědomili si, že v našem případě je $n = 1$ a $Y(x)$ lze volit rovno $e^{\operatorname{tg} x}$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Řešíme tedy rovnici $c'(x) = e^{-\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x}$, a dostáváme, že ji splňuje funkce $c(x) = \operatorname{tg} x$ a též funkce, které se od ní liší o přičtení reálné konstanty. Jedním „partikulárním“ řešením je proto funkce $y(x) = \operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x}$. Všechna řešení jsou pak tvaru $y(x) = Ce^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x}$, $C \in \mathbb{R}$, podle tvrzení o lineárních diferenciálních rovnicích. Počáteční podmínku $y(0) = 1$ splňuje jediné maximální řešení a sice funkce $y(x) = (1 + \operatorname{tg} x)e^{\operatorname{tg} x}$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Poznamenejme ještě, že dosazením všech možných řešení $c(x) = \operatorname{tg} x + C$ do vztahu $y(x) = c(x)e^{\operatorname{tg} x}$ jsme mohli dostat obecné řešení přímo, bez přičítání obecného řešení homogenní rovnice. Ověřte si, že i tento postup vede vždy k cíli.

Povšimněte si též toho, že původní rovnici s koeficientem $\cos^2 x$ u y' jsme nemuseli dělit tímto koeficientem a dosazením řešení ve tvaru $y(x) = c(x)e^{\operatorname{tg} x}$ bychom dostali, že musí platit $\cos^2 x c'(x)e^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x}$. To vede rychle ke stejnému výsledku jako dříve. ■

Předvedeme si nyní postup na soustavě více rovnic.

P ř í k l a d Najděte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3 + e^{2x} \\ y_2' &= y_1 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 + 2e^{2x}. \end{aligned}$$

Řešení. Např. metodou eliminace vyloženou v §36 si odvoďte, že všechna řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_3 \\ y_3' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

jsou lineárními kombinacemi vektorových funkcí

$y_1(x) = (e^{-x}, 0, -e^{-x})^T$, $y_2(x) = (e^{2x}, e^{2x}, e^{2x})^T$ a $y_3(x) = (0, e^{-x}, -e^{-x})^T$.

(Můžete si povšimnout, že tato homogenní soustava byla již řešena metodou eliminace v předposledním příkladu §36 a odvodit naše tvrzení z tam dosaženého výsledku.)

Variace konstant vede k hledání partikulárního řešení ve tvaru (s „proměnnými konstantami“) $Y(x)(c_1(x), c_2(x), c_3(x))^T$, kde $Y(x) = (y_1(x), y_2(x), y_3(x))$.

Funkce c_1, c_2 a c_3 řeší soustavu

$$Y(x)(c_1'(x), c_2'(x), c_3'(x))^T = (e^{2x}, 0, 2e^{2x})^T.$$

Jejím řešením metodou eliminace dostaneme např. řešení

$$c_1(x) = 0, \quad c_2(x) = x, \quad c_3(x) = -\frac{e^{3x}}{3}.$$

Máme tedy partikulární řešení $Y(x)(c_1(x), c_2(x), c_3(x))^T = e^{2x}(x, x - \frac{1}{3}, x + \frac{1}{3})^T$. Všechna maximální řešení soustavy jsou pak trojice tvaru

$$\begin{aligned} y_1(x) &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + x e^{2x}, \\ y_2(x) &= C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} + (x - \tfrac{1}{3}) e^{2x}, \\ y_3(x) &= -C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - C_3 e^{-x} + (x + \tfrac{1}{3}) e^{2x}. \end{aligned}$$

Všimněte si, že vzorce lze ještě upravit do o něco jednoduššího tvaru, my jsme je však zapsali tak, aby bylo patrnější, jak jsme k nim dospěli, totiž jako součet obecného řešení homogenní soustavy s námi nalezeným partikulárním řešením. ■

Nyní si předvedeme použití metody na rovnici vyššího řádu. Připomeneme si, že rovnici

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = b(x)$$

můžeme přepsat jako soustavu rovnic

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ &\dots \\ z_{n-1}' &= z_n \\ z_n' &= -a_n(x)z_1 - \dots - a_1(x)z_n + b(x). \end{aligned}$$

pro funkce $z_1 = y$, $z_2 = y'$, …, $z_n = y^{(n-1)}$. Jsou-li tedy y_1, …, y_n řešení příslušné homogenní rovnice n-tého řádu, hledáme partikulární řešení ve tvaru $c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$, přičemž funkce c_1, …, c_n řeší soustavu rovnic

$$(\mathfrak{c}') \qquad \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \dots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Poznamenejme, že v §36 jsme si vyložili metodu eliminace, kterou lze převést řešení každé soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu na postupné řešení rovnic vyššího řádu. Pokud bychom postup metody eliminace aplikovali na soustavu s nenulovou pravou stranou, došli bychom k rovnicím vyššího řádu s nenulovou pravou stranou, které bychom mohli řešit tak, jako to uděláme v následujícím příkladu. To nám dává jinou možnost, jak jsme mohli postupovat i v příkladu předchozím.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y'' + y = \operatorname{tg} x,$$

která splňují podmínky $y(0) = 1$ a zároveň $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} y(x) = 0$.

Řešení. Řešeními homogenní rovnice jsou lineární kombinace funkcí $\sin x$ a $\cos x$, jak se lze snadno přesvědčit pomocí řešení charakteristické rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ a dříve vyložené metody.

Hledáme tedy partikulární řešení ve tvaru $c_1(x)\sin x + c_2(x)\cos x$ a víme, že $c_1(x)$ a $c_2(x)$ musí splňovat soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} x \end{pmatrix}.$$

Snadnými úpravami dojdeme k závěru, že $c_1'(x) = \sin x$ a $c_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, a že tedy jednu dvojici řešení tvoří funkce $c_1(x) = -\cos x$ a $c_2(x) = \sin x - \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (Proveďte si podrobně výpočet primitivních funkcí. Pro nalezení

c_2 jsme si vyjádřili $c_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cos x$ a užili substituci novou proměnnou za funkci $\sin x$.)

Obecné řešení je tvaru

$$a\sin x + b\cos x + (-\cos x)\sin x + \left(\sin x - \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right)\cos x.$$

Jedině volba $a = 0$ a $b = 1$ dává řešení, které splňuje požadované podmínky. (O tom se přesvědčte např. vhodným použitím L'Hospitalova pravidla či vlastností Taylorových polynomů.) Je definováno na maximálním možném intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. ■

Na závěr tohoto paragrafu si předvedeme pro srovnání řešení rovnice řádu dva se speciální pravou stranou, kterou jsme řešili již v §35 metodou vhodnou výhradně k řešení rovnic se zmíněnými speciálními pravými stranami. Zde použijeme metodu variace konstant. Zároveň budeme postupovat tak, že dosadíme tvar partikulárního řešení do rovnice a odvodíme vztahy pro funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$. To je nepatrně odlišný postup od předchozího. Nemusíme si totiž k němu pamatovat soustavu $(\mathfrak{c}')$ pro $c_1(x)$ a $c_2(x)$ zpaměti. Zato si musíme pamatovat argument, o kterém se na příslušném místě řešení ještě zmíníme. Podobně jsme již postupovali v prvním příkladu tohoto paragrafu, kde ovšem šlo o případ, kdy n je rovno jedné, a tak argument, na který chceme upozornit, nebyl z důvodu, který bude patrný v následujícím, zapotřebí.

P ř í k l a d Najděte aspoň jedno maximální řešení rovnice

$$y'' - 6y' + 5y = e^x.$$

Řešení. Kořeny charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice $\lambda^2 - 6\lambda + 5$ jsou 1 a 5, a tedy fundamentální systém jejích řešení je tvořen například funkcemi e^x a e^{5x}.

Hledejme partikulární řešení zadané rovnice ve tvaru $y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{5x}$. Předpokládejme, že c_1 i c_2 mají druhé derivace a spočtěme si první a druhou derivaci funkce $y(x)$. Máme

$$y'(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)5e^{5x} + c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{5x}.$$

Dříve než přejdeme k výrazu pro druhou derivaci, uděláme krok, který je pro zvolený postup podstatný a je třeba si ho zapamatovat. Výrazy v předchozí rovnosti, které obsahují derivace funkcí c_1 a c_2, nebudeme dále derivovat. Tomu se vyhneme tím, že položíme

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{5x} = 0.$$

(Podobné kroky by následovaly u derivací druhé až $(n-1)$-ní, kdybychom řešili rovnici řádu n.)

Pro nejvyšší, v našem případě druhou, derivaci pak dostáváme

$$y''(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)25e^{5x} + c_1'(x)e^x + c_2'(x)5e^{5x}.$$

Dosazením výrazů pro y, y' a y'' do zadané diferenciální rovnice docházíme k rovnosti

$$c_1(x)(e^x - 6e^x + 5e^x) + c_2(x)(25e^{5x} - 6 \cdot 5e^{5x} + 5 \cdot e^{5x}) + c_1'(x)e^x + c_2'(x)5e^{5x} = c_1'(x)e^x + c_2'(x)5e^{5x} = e^x.$$

Konečně tedy dostáváme tímto postupem rovnice

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{5x} = 0 \qquad \text{a} \qquad c_1'(x)e^x + c_2'(x)5e^{5x} = e^x,$$

které jsme si též mohli pamatovat z výše popsaného postupu (viz ($\mathfrak{c}'$), resp. ($\mathfrak{c}$)) zpaměti.

Řešením soustavy rovnic pro c_1' a c_2' dostáváme, že $c_1'(x) = -\frac{1}{4}$ a $c_2'(x) = \frac{1}{4}e^{-4x}$. Možnou volbou je proto $c_1(x) = -\frac{1}{4}x$ a $c_2(x) = -\frac{1}{16}e^{-4x}$ a jedním maximálním řešením zadané rovnice je funkce

$$-\frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{16}e^{-4x}e^{5x} = -\left(x + \frac{1}{4}\right)\frac{e^x}{4}.$$

■

6. Konvergence číselných řad

Součtem nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (komplexních nebo reálných čísel) rozumíme limitu posloupnosti částečných součtů, tj. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + \cdots + a_n)$, pokud tato existuje. Řekneme, že řada konverguje, je-li jejím součtem (komplexní nebo reálné) číslo. V opačném případě říkáme, že řada diverguje. Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Pokud řada konverguje, ale nekonverguje absolutně, řekneme, že konverguje neabsolutně. Analogicky se definuje součet, konvergence a divergence řady $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ pro $k \in \mathbb{N}$. Je zřejmé, že řada $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (ovšem za předpokladu, že všechna a_n jsou definovaná), i když součty se liší o číslo $\sum_{n=1}^{k-1} a_n$. Ukážeme si základní metody zkoumání, zda daná řada konverguje či diverguje.

§39. První možností je **použití definice**, tedy explicitní vyjádření n-tého částečného součtu a výpočet limity.

<u>P ř í k l a d</u> Zjistěte, pro které hodnoty $q \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

Řešení. Spočtěme n-tý částečný součet. Pro $q \neq 1$ jest $s_n = q + q^2 + \cdots + q^n = q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$, pro $q = 1$ je $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$. Přitom platí

$$\lim_{n\to\infty} n = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \begin{cases} = +\infty & q > 1, \\ = \frac{q}{1-q} & q \in (-1, 1), \\ \text{neexistuje} & q \leq -1. \end{cases}$$

Odtud plyne, že naše řada konverguje právě pro $q \in (-1, 1)$. ■

<u>P ř í k l a d</u> Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Řešení. Platí $\lim_{n\to\infty} (1 + 2 + \cdots + n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} n(n+1) = +\infty$, řada tedy diverguje. ■

<u>P ř í k l a d</u> Konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n+1}{n}$?

Řešení. Jest

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (\log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \cdots + \log \frac{n+1}{n}) &= \lim_{n\to\infty} \log \frac{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty, \end{aligned}$$

řada tedy diverguje. ■

§40. K důkazu divergence se občas hodí **nutná podmínka konvergence**, obsažená v následující větě.

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>P ř í k l a d</u> Pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$?

Řešení. Je-li $x = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, pak řada konverguje, protože všechny její členy jsou nulové. V ostatních případech $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$ neexistuje (podle [Z, Cvičení 35], důkaz je podán v [D2, kap.II, §2, cvičení 7]), a tedy řada diverguje. ■

Poznamenejme, že uvedenou větu nelze použít k důkazu konvergence. Uvedená podmínka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ je totiž nutná, ale nikoli postačující pro konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. O tom svědčí poslední příklad předchozího paragrafu a též příklady v následujícím paragrafu či v §45.

§41. Nutnou a postačující podmínkou pro konvergenci řady je **Bolzano-Cauchyova podmínka**.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní, právě když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N}) \left(\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} \right| < \varepsilon \right).$$

<u>Příklad</u> Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverguje.

Řešení. Platí $\sum\limits_{k=1}^{n} 1/(n+k) \geq n \cdot 1/2n = 1/2$. Tedy, pokud $\varepsilon = 1/2$, pak pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ (konkrétně $p = n = n_0$), že $\left|\sum\limits_{k=1}^{p} a_{n+k}\right| \geq \varepsilon$. To dokazuje divergenci řady. ■

§42. Následující věta se nazývá **srovnávacím kritériem**.

Nechť (a_n) *a* (b_n) *jsou dvě posloupnosti reálných čísel, pro které existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro všechna* $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ *platí* $|a_n| \leq b_n$. *Jestliže* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak konverguje i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Jestliže* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje, diverguje i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

V popsané situaci se řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ často nazývá majorantou řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak lze uvedenou větu parafrázovat takto: Má-li řada konvergentní majorantu, je sama konvergentní.

Důsledkem srovnávacího kritéria je následující tvrzení.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pak konverguje.*

<u>Příklad</u> Pro které hodnoty $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$?

Řešení. Pro $x=-1$ nebo $x=1$ řada diverguje podle tvrzení v §40.

Dále zkoumejme případ $x \in (-1,1)$. Pak $\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \le |x|^n$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$ konverguje podle příkladu v §39, naše řada tedy konverguje též (dokonce absolutně).

Nakonec zkoumejme případ $|x|>1$. Pak $\left|\frac{x^n}{1+x^{2n}}\right| \le \frac{|x|^n}{x^{2n}} = \frac{1}{|x|^n}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^n}$ konverguje podle příkladu v §39, naše řada tedy konverguje též (dokonce absolutně).

Závěr je, že naše řada pro $x=\pm 1$ diverguje a v ostatních případech konverguje absolutně. ∎

§43. Užitečnou variantou srovnávacího kritéria je jeho limitní verze.

Nechť (a_n) a (b_n) jsou dvě posloupnosti reálných čísel, přičemž $b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(i) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existuje a je vlastní, a pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (dokonce absolutně).

(ii) Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ je vlastní a nenulová, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

<u>Příklad</u> Zjistěte, pro které hodnoty $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{2^n}$.

Řešení. Pro $x=0$ řada zřejmě konverguje. Dále uvažujme případ $x>0$. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n \sin \frac{1}{2^n}}{\frac{x^n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1,$$

konverguje naše řada, právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$. A ta konverguje pro $x \in (0,2)$, pro $x \ge 2$ diverguje.

Zbývá vyšetřit případ $x<0$. Pokud $x>-2$, pak řada díky předchozímu odstavci konverguje absolutně, a tedy konverguje dle §42. Pokud $x \le -2$, pak nelze použít srovnávací ani limitní srovnávací kritérium, lze však použít nutnou podmínku konvergence. Kdyby totiž $\lim\limits_{n\to\infty} x^n \sin\frac{1}{2^n} = 0$, pak i

$$0 = \lim_{n\to\infty} |x|^n \sin\frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|}{2}\right)^n \frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}},$$

což je spor, protože poslední limita se rovná 1 pro $x=-2$ a $+\infty$ pro $x<-2$.

Závěr je, že řada ze zadání konverguje pro $x \in (-2,2)$ a diverguje, pokud $|x| \ge 2$.

∎

§44. Důsledky srovnávacího kritéria jsou **odmocninové a podílové kritérium**. Často se používají jejich limitní verze.

Cauchyovo odmocninové kritérium: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel.*

(i) Jestliže $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

(ii) Jestliže $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

D'Alembertovo podílové kritérium: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel.*

(i) Jestliže $\lim |a_{n+1}|/|a_n| < 1$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

(ii) Jestliže $\lim |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, *pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Ze znění vět je zřejmé, že podílové kritérium je použitelné pouze pro řady s nenulovými členy (nebo alespoň s členy nenulovými od jistého n_0 počínaje). Dalším omezením je předpoklad existence příslušné limity.

P ř í k l a d Zjistěte, pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+1}{5n+17}\right)^n$.

Řešení. Počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{an+1}{5n+17}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{an+1}{5n+17}\right| = \frac{|a|}{5}.$$

Pokud $a \in (-5, 5)$, pak řada konverguje absolutně podle odmocninového kritéria, pokud $|a| > 5$, řada diverguje. V případě, že $a = 5$ nebo $a = -5$, nelze odmocninového kritéria použít. Nicméně

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{5n+1}{5n+17}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \tfrac{16}{5n+17}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \log\left(1 - \tfrac{16}{5n+17}\right)\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\tfrac{16n}{5n+7} \frac{\log\left(1-\frac{16}{5n+17}\right)}{\frac{16}{5n+7}}\right) = e^{-16/5},$$

pro $a = 5$ tedy řada diverguje podle §40. Podobně pro $a = -5$ je

$$\left(\frac{-5n+1}{5n+17}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(\frac{5n-1}{5n+17}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(1 - \frac{18}{5n+17}\right)^n,$$

kteréžto posloupnost nemá limitu (posloupnost sudých členů má limitu $e^{-18/5}$ a posloupnost lichých členů $-e^{-18/5}$).

Závěr je, že řada konverguje absolutně pro $a \in (-5, 5)$ a v ostatních případech diverguje. ■

P ř í k l a d Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$?

Řešení. Řada má kladné členy. Označme $a_n = \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$ a počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^\alpha}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot (n+1)^{\alpha-2} = \begin{cases} 0 & \alpha < 2, \\ 1/4 & \alpha = 2, \\ +\infty & \alpha > 2. \end{cases}$$

Podle podílového kritéria tedy řada konverguje (absolutně) pro $\alpha \le 2$ a diverguje pro $\alpha > 2$. ■

Uvedená kritéria lze zobecnit i pro případ, že příslušná limita neexistuje. Tak například *v odmocninovém kritériu lze* $\lim\limits_{n\to\infty}$ *nahradit* $\limsup\limits_{n\to\infty}$, *a tvrzení zůstanou v platnosti. V podílovém kritériu lze* $\lim\limits_{n\to\infty}$ *v bodě (i) nahradit* $\limsup\limits_{n\to\infty}$ *a v bodě (ii)* $\liminf\limits_{n\to\infty}$.

<u>Příklad</u> Pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+(-1)^n \cdot an}{2n+3}\right)^n$?

Řešení. Jest $\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+(-1)^n\cdot an}{2n+3}\right)^n\right|} = \left|\frac{n+(-1)^n\cdot an}{2n+3}\right|$. Posloupnost členů s lichými indexy má limitu $|1-a|/2$, posloupnost členů se sudými indexy má limity $|1+a|/2$. Limes superior je tedy $\max\{|1-a|/2, |1+a|/2\}$.

Pokud $a = 0$, pak existuje limita a rovná se $1/2$ (a řada tedy konverguje absolutně). Pokud $a > 0$, pak limes superior je $(1+a)/2$. Přitom $(1+a)/2 < 1$ pro $a < 1$. Proto pro $a \in (0,1)$ řada konverguje absolutně a pro $a > 1$ řada diverguje. Pokud $a < 0$, pak limes superior je $(1-a)/2$. Tedy řada konverguje absolutně pro $a \in (-1, 0)$ a diverguje pro $a < -1$.

Zbývá vyšetřit, co se děje pro $a = 1$ a $a = -1$. Pro $a = 1$ má řada tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+(-1)^n\cdot n}{2n+3}\right)^n$. Členy s lichými indexy jsou nulové, členy se sudými indexy mají tvar $\left(\frac{2n}{2n+3}\right)^n = \left(1 - \frac{3}{2n+3}\right)^n$, mají tedy limitu $e^{-3/2}$ (což lze spočítat stejně jako podobná limita v prvním příkladu tohoto paragrafu). Proto řada diverguje podle §40. Podobně pro $a = -1$ jsou členy se sudými indexy nulové a členy s lichými indexy mají limitu $e^{-3/2}$.

Závěr je, že pro $a \in (-1, 1)$ řada konverguje absolutně a v ostatních případech diverguje. ■

§45. Použít výsledky o konvergenci určitých (Newtonových) integrálů – viz oddíl 4 – umožňuje **integrální kritérium**.

Nechť f je spojitá nezáporná nerostoucí funkce definovaná na intervalu $[1,\infty)$. *Pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *konverguje, právě když konverguje integrál* $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

<u>Příklad</u> Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$?

Řešení. Pokud $\alpha \leq 0$, není splněna nutná podmínka konvergence, a tedy řada diverguje podle §40. Je-li $\alpha > 0$, pak funkce $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ splňuje předpoklady integrálního kritéria. Podle §21 integrál $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$. Tedy i naše řada konverguje právě pro $\alpha > 1$. ∎

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$.

Řešení. Použijeme integrální kritérium pro funkci $f(x) = \frac{1}{x\log^2 x}$, která je spojitá a klesající na $[2,\infty)$. Přitom podle §26 platí $\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\log^2 x} = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$. Poslední integrál konverguje dle §21. Řada tedy konverguje. ∎

§46. Užitečnou možností je **srovnání s řadou typu** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Nejde vlastně o novou metodu, jde o využití faktu, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$ (dle předchozího paragrafu) a srovnávacího kritéria (§42 a §43).

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}$.

Řešení. Nejprve členy řady upravme (používáme metodu vhodného rozšíření a metodu vytknutí převládajícího členu podle [Z, oddíl 2.1, §7 a §6], které se hodí i při vyšetřování konvergence řad)

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}} = \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt{n^2+1}+n} =$$
$$= \frac{1}{n^{1/3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n})^2}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}.$$

Platí tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{1/3}}} = 3/2$. Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverguje, diverguje i naše řada. ∎

§47. Nejjednodušším kritériem pro neabsolutní konvergenci je **Leibnizovo kritérium**.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost reálných čísel s limitou* 0. *Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *konverguje.*

<u>Příklad</u> Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$?

Řešení. Pokud $\alpha \leq 0$, pak řada diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence z §40. Pokud $\alpha > 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ a navíc je posloupnost $(\frac{1}{n^\alpha})_{n=1}^{\infty}$ klesající. Řada tedy konverguje podle Leibnizova kritéria. ■

Poznamenejme, že v §45 jsme ukázali, že řada z předchozího příkladu konverguje absolutně, právě když $\alpha > 1$. Pokud tedy $\alpha \in (0,1]$, pak řada konverguje neabsolutně.

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{20\cdot(-1)^n}{n^2}}$.

Řešení. Podle limitního srovnávacího kritéria z §43 srovnáním s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ snadno zjistíme, že řada nekonverguje absolutně. Zkusme tedy aplikovat Leibnizovo kritérium pro $a_n = \frac{1}{n+\frac{20\cdot(-1)^n}{n^2}}$. Jest ovšem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Vidíme však, že

$$a_1 = -1/19, a_2 = 1/6, a_3 = -9/11, a_4 = 4/9;$$

posloupnost tedy není nerostoucí.

Nicméně pro $n \geq 7$ platí

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n+1+\frac{20\cdot(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}} \leq \frac{1}{n+1-\frac{20}{8^2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{n+1/2} \leq \frac{1}{n+\frac{20}{7^2}} \leq \frac{1}{n+\frac{20}{n^2}} \leq \frac{1}{n+\frac{20\cdot(-1)^n}{n^2}} = a_n, \end{aligned}$$

a tedy řada $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\frac{20\cdot(-1)^n}{n^2}}$ konverguje podle Leibnizova kritéria. Protože všechny členy řady ze zadání jsou definovány, konverguje i ona.

Rozmyslete si, jak jsme přišli na to, že monotonie platí zrovna od $n = 7$. Je-li totiž $20/n^2 < 1/2$, pak tento člen monotonii nepokazí. A to je splněno pro $n \geq 7$. Mohli jsme však argumentovat i tím, že $20/n^2$ má limitu 0. A tedy tento výraz je od jistého členu počínaje menší než $1/2$, aniž je třeba specifikovat od kterého členu. ■

§48. Dalším kritériem pro ověření (nikoliv nutně absolutní) konvergence je **Dirichletovo kritérium**, které je analogií stejnojmenného kritéria pro konvergenci integrálu.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *a* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti reálných čísel. Pokud posloupnost* $(a_1 + \cdots + a_n)_{n=1}^{\infty}$ *částečných součtů řady* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je omezená a posloupnost* b_n *je monotónní a má limitu* 0*, pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Dirichletovo kritérium je zobecněním Leibnizova kritéria (uvědomte si proč). Užitečná je následující pomůcka (viz [D2, kap. III, §5, cvičení 4]).

Nechť $x \in \mathbb{R}$ *není celočíselným násobkem* 2π*. Pak pro každé* $N \in \mathbb{N}$ *je*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|} \qquad a \qquad \left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| \le \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

<u>P ř í k l a d</u> Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Řešení. Je-li $x = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$, pak jde o řadu s nulovými členy, která jistě konverguje (dokonce absolutně). Není-li x násobkem π (násobkem myslíme celočíselný násobek), pak x není násobkem 2π, a tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů (a to číslem $\frac{1}{|\sin(x/2)|}$ dle předcházejícího tvrzení) a posloupnost $1/n$ je klesající a má limitu 0. Řada tedy konverguje dle Dirichletova kritéria. ∎

<u>P ř í k l a d</u> Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nx}{n^2 - \log n}$.

Řešení. Pokud x není násobkem 2π, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů (dle tvrzení na počátku paragrafu), a tak můžeme zkusit použít Dirichletovo kritérium. Jest $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 - \log n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/n}{1-(\log n)/n^2} = 0$. Není však na první pohled zřejmé, zda posloupnost $\frac{n}{n^2 - \log n}$ je nerostoucí. Monotonii můžeme ověřit například tak, že pomocí derivování ukážeme, že funkce $f(x) = \frac{x}{x^2 - \log x}$ je nerostoucí na $[1, \infty)$ nebo alespoň na nějakém okolí $+\infty$. Protože

$$f'(x) = \frac{(x^2 - \log x) - x(2x - 1/x)}{(x^2 - \log x)^2} = \frac{-x^2 + 1 - \log x}{(x^2 - \log x)^2},$$

je $f'(x) \le 0$ pro $x \ge 1$ (je totiž zřejmé, že $-x^2 + 1 - \log x \le 0$ pro $x \ge 1$). Funkce f je tedy skutečně nerostoucí na $[1, \infty)$, proto i naše posloupnost je nerostoucí. Lze tudíž použít Dirichletovo kritérium a řada konverguje.

Je-li x násobkem 2π, pak má řada tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 - \log n}$ a můžeme ji srovnat s řadou

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$, která diverguje. Proto i naše řada diverguje. ■

Následující příklad ukazuje možnost nepřímého užití Dirichletova kritéria pro důkaz divergence.

<u>Příklad</u> Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^\alpha}$.

Řešení. Protože $|\sin n| \leq 1$ pro každé n, ze srovnávacího kritéria z §42 a z §45 plyne, že pro $\alpha > 1$ řada konverguje. Pro $\alpha \leq 0$ není splněna nutná podmínka konvergence – je totiž $\frac{|\sin n|}{n^\alpha} \geq |\sin n|$, a posloupnost $|\sin n|$ určitě nemá limitu 0, protože posloupnost $\sin n$ nemá limitu (to jsme použili již v příkladu z §40). Řada tedy diverguje dle §40.

Zbývá případ $\alpha \in (0,1]$. Pak nutná podmínka konvergence je splněna. Nicméně

$$\frac{|\sin n|}{n^\alpha} \geq \frac{\sin^2 n}{n^\alpha} = \frac{1-\cos 2n}{2n^\alpha} = \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\cos 2n}{2n^\alpha}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^\alpha}$ diverguje dle §45, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n^\alpha}$ konverguje dle Dirichletova kritéria. Proto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^\alpha}$ diverguje, a tedy podle srovnávacího kritéria z §42 diverguje i naše řada. ■

§49. Další analogií s kritérii pro integrály je **Abelovo kritérium**.

Nechť posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *je monotónní a omezená.*

(i) Pokud $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

(ii) Pokud navíc $\lim b_n \neq 0$*, pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

<u>Příklad</u> Pro která $\alpha, x \in \mathbb{R}$ konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n \cdot \frac{n^2+1}{n^\alpha} \cdot \cos nx$?

Řešení. Nejprve si úlohu zjednodušíme podle druhého bodu Abelova kritéria. Posloupnost $(\operatorname{arctg} n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a má limitu $\pi/2$, naše řada tedy konverguje, právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^\alpha} \cdot \cos nx$. Dále si všimněme, že posloupnost $((n^2+1)/n^2)$ je klesající a má limitu 1. Proto, opět dle Abelova kritéria (bod (ii)), naše řada konverguje, právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha-2}}$.

Je-li x násobkem 2π, má tato řada tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}}$, a tedy konverguje právě pro $\alpha > 3$ (viz §45).

Pokud x není násobkem 2π, pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezenou posloupnost částečných součtů (viz §48), a tedy pro $\alpha > 2$ řada konverguje dle Dirichletova kritéria. Pokud $\alpha \leq 2$, pak řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence z §40. Kdyby totiž $\frac{\cos nx}{n^{\alpha-2}}$ mělo limitu 0 pro nějaké $\alpha \leq 2$, pak by i posloupnost $\cos nx$ měla limitu 0. To však není pravda, protože tato posloupnost limitu nemá (analogické tvrzení pro posloupnost $\sin nx$ jsme již použili, pro $\cos nx$ je důkaz téměř stejný, viz [D2, kap. II, §2, cvičení 7]).

Závěr je, že řada konverguje, právě když x je násobek 2π a $\alpha > 3$, nebo x není násobek 2π a $\alpha > 2$. ■

7. $\mathbb{R}^n$ jako metrický prostor.

Předvedeme především několik metod, jak vyšetřovat vlastnosti podmnožin $\mathbb{R}^n$, které se nám budou hodit při vyšetřování funkcí více proměnných. Nebudeme se explicitně zabývat např. konvergencí posloupností prvků $\mathbb{R}^n$. Ta se redukuje na konvergenci posloupností reálných čísel, protože posloupnost vektorů x_k v $\mathbb{R}^n$ konverguje k x, právě když konvergují posloupnosti složek vektorů x_k k příslušné složce vektoru x.

Budeme studovat otevřenost, uzavřenost, omezenost, kompaktnost, konvexitu a souvislost zadaných množin. Většinou se budeme zabývat jen některými z uvedených vlastností. Jako cvičení můžete zkoumat i další vlastnosti těchto množin.

§50. Otevřenost a uzavřenost podmnožin $\mathbb{R}^n$. Zde se budeme zabývat metodami zjišťování otevřenosti, uzavřenosti, hledáním uzávěru, vnitřku a hranice množiny.

Několik metod týkajících se této problematiky lze nalézt též v [Z, 2.14].

<u>P ř í k l a d</u> Nechť

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < x^3 + y^3 + z^3 \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

(a) Je M otevřená nebo uzavřená?
(b) Co je uzávěr a co vnitřek M?
(c) Co je hranice M?

Řešení. (a) Uvažujme bod $v = (\sqrt[3]{2}, 0, 0) \in M$ a libovolné $r > 0$. Pak bod $w = (\sqrt[3]{2} + \frac{r}{2}, 0, 0)$ leží v kouli o středu v a poloměru r, ale neleží v M. Tedy M není otevřená.

Uvažujme posloupnost bodů $u_n = (\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}, 0, 0) \in M$. Jejich limitou je bod $u = (1,0,0)$, neboť konvergence u_n k u v $\mathbb{R}^3$ je ekvivalentní konvergenci i-tých složek vektorů u_n k i-té složce vektoru u. Bod u ale neleží v M, a proto M není uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^3$.

(Nepatrně odlišný argument využívá toho, že množina je uzavřená, právě když její doplněk je otevřený. Uvažujeme-li ε-okolí bodu $(1,0,0) \notin M$, pak snadno ukážeme, že obsahuje nějaký prvek tvaru $(\sqrt[3]{1+\delta}, 0, 0) \in M$.)

(b) Uvažujme množinu

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon 1 \le x^3+y^3+z^3 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}.$$

Ta je průnikem množin $f^{-1}([1,2])$, $f_1^{-1}([0,\infty))$, $f_2^{-1}([0,\infty))$ a $f_3^{-1}([0,\infty))$, kde $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je definováno předpisem $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$, $f_1(x,y,z) = x$, $f_2(x,y,z) = y$, $f_3(x,y,z) = z$. Zobrazení f, f_1, f_2 i f_3 jsou spojitá, neboť jde o polynomy třech proměnných. Množina U je tedy průnikem vzorů uzavřených podmnožin $\mathbb{R}$ při uvedených spojitých zobrazeních. Proto je množina U uzavřená. Množina U zřejmě obsahuje množinu M a přitom ke každému bodu množiny U konverguje nějaká posloupnost bodů množiny M. Pro libovolný bod $v \in M$ stačí volit konstantní posloupnost $v_n = v$, pro bod $w = (w_1,w_2,w_3) \in U \setminus M$ stačí uvažovat posloupnost bodů $w_n = (w_1\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}, w_2, w_3)$, které zřejmě leží v U, neboť $0 \le w_1 \le 1$. To plyne z rovnosti $w_1^3+w_2^3+w_3^3 = 1$ a z nezápornosti w_1, w_2 a w_3. Každý bod U tedy leží v uzávěru M a protože je U uzavřená množina, je nutně $U = \overline{M}$.

Uvažujme množinu

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon 1 < x^3+y^3+z^3 < 2,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Množina V je otevřená, neboť je průnikem konečně mnoha otevřených množin $f^{-1}((1,2))$, $f_1^{-1}((0,\infty))$, $f_2^{-1}((0,\infty))$ a $f_3^{-1}((0,\infty))$. Jde totiž o vzory otevřených množin při spojitých zobrazeních. Množina V je podmnožinou M. K bodu $(0,y,z) \in M$ konverguje posloupnost bodů $(-\frac{1}{n}, y, z)$, které neleží v M, a tedy bod $(0,y,z)$ není vnitřním bodem M. Podobně pro body v M, které mají nulovou druhou nebo třetí souřadnici. Pokud $x^3+y^3+z^3 = 2$ pro nějaký bod $(x,y,z) \in M$, konverguje posloupnost bodů $(x+\frac{1}{n}, y, z) \notin M$ k (x,y,z) a tento není proto vnitřním bodem M. Tím jsme ověřili, že množina V je rovna vnitřku množiny M.

(c) Hranice množiny M je rovna množině $U \setminus V$, tedy množině těch bodů (x,y,z), pro které platí namísto některé z neostrých nerovností v definici U rovnost. ■

<u>P ř í k l a d</u> Uvažujme množiny $M_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon (|x|+|y|)e^{-(|x|+|y|)} \le r\}$ pro $r \in \mathbb{R}$. Co je vnitřkem a co uzávěrem množiny M_r?

Řešení. Množina M_r je uzavřená, neboť je vzorem uzavřené množiny $(-\infty, r] \subset \mathbb{R}$ při spojitém zobrazení $f(x,y) = (|x|+|y|)e^{-(|x|+|y|)}$. To je spojité díky spojitosti funkce $|x|+|y|$, která je ekvivalentní normou na $\mathbb{R}^2$, a díky tomu, že f je popsáno pomocí složení spojité funkce te^{-t} s touto normou. Množina M_r je tedy rovna svému uzávěru.

Protože funkce te^{-t} nabývá svého maxima v bodě 1, je $M_r = \mathbb{R}^2$ pro $r \geq e^{-1}$. To je obojetná, tedy uzavřená i otevřená množina, a proto je rovna svému vnitřku. (Povšimněte si, že pro $r = e^{-1}$ není vnitřkem M_r množina popsaná jako M_r s nahrazením neostré nerovnosti ostrou nerovností.)

Pro $r \leq 0$ neobsahuje M_r žádný vnitřní bod, neboť je prázdná pro $r < 0$ a jednoprvková ($\{(0,0,0)\}$) pro $r = 0$ a v $\mathbb{R}^2$ není $\{(0,0,0)\}$ otevřená, neboť v každém okolí počátku leží např. bod $(\frac{1}{n}, 0, 0)$ pro nějaké, dostatečně velké, $n \in \mathbb{N}$.

Dokážeme, že pro $r \in (0, e^{-1})$ je otevřená množina

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (|x| + |y|)e^{-(|x|+|y|)} < r\}$$

vnitřkem M_r. Nechť $(|x| + |y|)e^{|x|+|y|} = r$. Ukážeme, že v každém okolí bodu (x,y) leží bod z doplňku M_r. Uvážíme-li, že funkce te^t je rostoucí na intervalu $[0,1]$ a klesající na intervalu $[1,\infty]$, je bod $((1+\varepsilon)x, (1+\varepsilon)y)$ takovým bodem, pokud $|x| + |y| < 1$ a ε je dostatečně malé kladné číslo, a bod $((1-\varepsilon)x, (1-\varepsilon)y)$ je takovým bodem, pokud $|x| + |y| > 1$ a ε je dostatečně malé kladné číslo. ■

§51. Omezenost a kompaktnost množin v $\mathbb{R}^n$. Ukážeme si na několika příkladech, jak lze vyšetřovat omezenost množin. Platí:

Podmnožina $\mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

Díky tomu je omezenost úzce spojena též s vyšetřováním kompaktnosti, a naopak, podaří-li se nám ověřit kompaktnost jinak, pak tím dostáváme i omezenost množiny. Proto tyto vlastnosti studujeme společně v tomto paragrafu.

P ř í k l a d Je M z prvního příkladu paragrafu §50 omezená?

Řešení. Nechť $(x,y,z) \in M$. Protože jsou souřadnice nezáporné, plynou z nerovnosti $x^3 + y^3 + z^3 \leq 2$ nerovnosti $x \leq 2$, $y \leq 2$ a $z \leq 2$. Množina M je tedy částí omezeného intervalu $[0,2] \times [0,2] \times [0,2]$. Je tedy též omezená. ■

P ř í k l a d Je množina $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2 \leq xyz < 4\}$ omezená?

Řešení. Volme $v_n = (n, \frac{1}{n}, 2)$. Pak $v_n \in A$ a norma v_n je větší než n. Množina A tedy není omezená. ■

P ř í k l a d Dokažte, že množina

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 5,\ xy + yz + zx = 8\}$$

je kompaktní.

Řešení. Množina M je uzavřená, protože je průnikem množin $f^{-1}(\{5\})$ a $g^{-1}(\{8\})$, kde $f(x,y,z) = x + y + z$ a $g(x,y,z) = xy + yz + zx$. Protože f i g jsou spojité funkce a jednoprvkové podmnožiny $\mathbb{R}$ jsou uzavřené, je M uzavřená.

Pro $(x,y,z) \in M$ je $(x+y+z)^2 = 25 = x^2+y^2+z^2+16$, tedy $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3$. Množina M je tedy podmnožinou povrchu koule se středem v počátku a o poloměru 3 a je tudíž omezená.

Protože každá omezená uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^3$ je kompaktní, je M kompaktní. ■

<u>P ř í k l a d</u> Dokažte, že množina

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

je omezená.

Řešení. Ověřte si nejprve, že

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ y \geq 0\} = \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \in \mathbb{R}^2 \colon r \geq 0,\ \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\}.$$

Dosadíme-li vyjádření prvku prvého kvadrantu pomocí r a α do rovnosti popisující D, dostaneme $r = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^3\alpha + \sin^3\alpha}$. Množina D je tedy obrazem kompaktního intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ při spojitém zobrazení $\varphi(\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Množina D je tudíž kompaktní a tedy i omezená. ■

<u>P ř í k l a d</u> Dokažte, že množina

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 5x^2 + 2y^2 + 2xy \leq 5\}$$

je omezená.

Řešení. Předvedeme dva důkazy. První zcela elementární vyžaduje úpravu levé strany nerovnosti v definici M na vhodný tvar. Druhý využívá hlubší vlastnosti kvadratických forem.

1. Úprava $5x^2 + 2y^2 + 2xy = 4x^2 + y^2 + (x+y)^2 \leq 5$ dává snadno, že $|x| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ a $|y| \leq \sqrt{5}$. Množina M je tedy omezená.

2. Můžeme psát $5x^2 + 2y^2 + 2xy = [A(x,y)^T, (x,y)^T]$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sylvestrovo pravidlo dává, že kvadratická forma definovaná maticí A je pozitivně definitní, neboť determinanty 5 a $\det A = 9$ jsou kladné. Je tedy $\langle Av, v\rangle > 0$, pokud $\|v\| = 1$. Protože funkce $f(v) = \langle Av, v\rangle$ je spojitá na kompaktní množině $S = \{v \in \mathbb{R}^2 \colon \|v\| = 1\}$, existuje $v_0 \in S$, ve kterém f nabývá svého minima na S. Konečně máme $f(\frac{v}{\|v\|}) \geq f(v_0) > 0$ pro $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pro nenulové $v \in M$ je proto $5 \geq f(v) \geq f(v_0)\|v\|^2$, tedy $\|v\| \leq \sqrt{5}$ a M je omezená.

(Poznamenejme, že jsme vpodstatě odvodili, že pro každou pozitivně definitní kvadratickou formu $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje kladné ε takové, že $f(v) \geq \varepsilon\|v\|^2$ na $\mathbb{R}^n$.

To je známá vlastnost pozitivně definitních kvadratických forem na $\mathbb{R}^n$ a není třeba ji odvozovat při řešení příkladu, pokud ji znáte z přednášky.) ■

§52. Konvexita a souvislost množin v $\mathbb{R}^n$. Pojmy konvexity a souvislosti v $\mathbb{R}$ splývají s pojmem intervalu (mezi intervaly zde zahrnujeme i jednoprvkové množiny a prázdnou množinu). Jejich význam je proto podstatnější až v rovině, kde už se mohou podstatně lišit a při studiu spojitých funkcí mohou v jistém smyslu nahradit pojem intervalu na přímce. Platí:

Každá konvexní množina v $\mathbb{R}^n$ je souvislá.

Konvexita je proto častým prostředkem k důkazu souvislosti. K ověření toho, že daná množina je konvexní se hodí snadné pozorování:

Je-li $f\colon C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexní funkce definovaná na konvexní množině C, pak množiny $\{x \in C\colon f(x) < r\}$ a $\{x \in C\colon f(x) \le r\}$ jsou konvexní pro každé $r \in \mathbb{R}$.

Platí též:

Průnik jakéhokoliv systému konvexních množin je konvexní množina.

P ř í k l a d Dokažte, že množina

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon |x| + e^y < e,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}$$

je konvexní.

Řešení. Podle předchozího stačí ověřit, že funkce

$$f(x, y, z) = |x| + e^y \qquad \text{a} \qquad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

jsou konvexní, protože množina K je průnikem množin $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon |x|+e^y < e\}$ a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}$.

Ověříme to přímo pomocí nerovností charakterizujících konvexitu funkce. (Jiná cesta vyšetřování konvexity funkcí bude ukázána v §57.)

Zvolme $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ a $t \in (0, 1)$. Pak

$$\begin{aligned} f(t(x_1, y_1, z_1) + (1-t)(x_2, y_2, z_2)) &= |tx_1 + (1-t)x_2| + e^{ty_1+(1-t)y_2} \le \\ &\le t|x_1| + (1-t)|x_2| + te^{y_1} + (1-t)e^{y_2} = \\ &= tf(x_1, y_1, z_1) + (1-t)f(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Zde jsme užili konvexitu funkcí jedné proměnné $t \mapsto |t|$ a $t \mapsto e^t$. Podobně s využitím konvexity funkce $t \mapsto t^2$ dostáváme, že g je konvexní. ■

P ř í k l a d Je M z prvního příkladu paragrafu §50 souvislá? Je konvexní?

Řešení. Množina M není konvexní, neboť např. body $(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, 0, 0)$ a $(0, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, 0)$ patří do M, ale střed úsečky, která je spojuje, tedy $(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, 0)$ v M neleží. Nemůžeme tedy užít konvexitu jako postačující podmínku pro souvislost M. Přesto ukážeme, že M je souvislá.

Množina $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x^3+y^3+z^3 = 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$ je spojitým obrazem množiny $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^3+y^3 \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$ při zobrazení $(x,y) \mapsto (x, y, \sqrt[3]{2-x^3-y^3})$. Množina K je konvexní podmnožinou $\mathbb{R}^2$. Je-li totiž $(x_3,y_3) = a(x_1,y_1) + (1-a)(x_2,y_2)$ pro nějaké $a \in (0,1)$ a body (x_1,y_1), (x_2,y_2) v K, snadno ověříme, že díky konvexitě třetí mocniny na $[0,\infty)$ platí všechny nerovnosti z definice K i pro bod (x_3,y_3). Množina K je tedy souvislá a množina S je souvislá, neboť je jejím spojitým obrazem. Konečně, je-li $(x,y,z) \in M \setminus S$, je úsečka $U_{x,y,z} = \{t(x,y,z);\ t \in [1, \frac{2}{\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}}]\}$ souvislá podmnožina M, která protíná S. Z toho již snadno ověříme, že každá obojetná neprázdná množina, která protíná některou ze zmíněných úseček nebo množinu S, musí obsahovat celé $M = S \cup \bigcup\{U_{x,y,z}\colon (x,y,z) \in M \setminus S\}$. ■

P ř í k l a d Dokažte, že množina

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^3+y^3-2xy = 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

je souvislá.

Řešení. O této množině jsme ukázali v předchozím paragrafu, že je spojitým obrazem kompaktního intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Proto je též souvislá. ■

P ř í k l a d Dokažte, že množina

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^4 + |\operatorname{arctg} x| + y^2 e^{|y|} = 2\}$$

je souvislá.

Řešení. Množina S je rovna $f^{-1}(\{2\})$, kde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná předpisem $f(x,y) = x^4 + |\operatorname{arctg} x| + y^2 e^{|y|}$, a tedy S je uzavřená.

Je-li $(x,y) \in S$, pak $|x| \le 2$ a $|y| \le 2$, neboť f je součtem nezáporných funkcí, funkce $e^{|y|}$ je větší nebo rovna jedné a $\sqrt[4]{2} \le \sqrt[2]{2} \le 2$. Množina S je tedy omezená. Protože je i uzavřená v $\mathbb{R}^2$, je kompaktní.

Uvažujme množinu $I = \{x \in \mathbb{R}\colon x^4 + |\operatorname{arctg} x| \le 2\}$. Funkce $x^4 + |\operatorname{arctg} x|$ je spojitá sudá a je rostoucí pro $x \ge 0$ s limitou $+\infty$ pro $x \to +\infty$, a proto I je kompaktní interval tvaru $[-x_0, x_0]$. Projekce množiny S na první souřadnici, tj. $\{x \in \mathbb{R}\colon \exists y\colon (x,y) \in S\}$, je zřejmě částí I. Pro libovolné $x \in [0, x_0]$ je funkce $y \mapsto y^2 e^{|y|} + x^4 + |\operatorname{arctg} x| - 2$ spojitá a rostoucí na intervalu $[0,\infty)$, nabývá nekladné hodnoty v nule a její limita v ∞ je nekonečná. Proto existuje jediné $y_+(x) \ge 0$ takové, že $(x, y_+(x)) \in S$. Ze symetrie dostáváme

$$S = \{(x, y_+(x))\colon x \in I\} \cup \{(x, y_-(x))\colon x \in I\},$$

kde y_+ a y_- jsou sudé funkce na I, přičemž $y_- = -y_+$.

Graf G_+ funkce $y_+\colon I \to \mathbb{R}$ je roven $S \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y \ge 0\}$. Proto je to uzavřená a omezená množina, tedy kompaktní množina. Označme $\varphi_+\colon I \to S$ zobrazení definované předpisem $\varphi_+(x) = (x, y_+(x))$. Pro libovolnou $F \subset S$ uzavřenou je $\varphi_+^{-1}(F) = \{x \in I\colon (\exists y \in \mathbb{R})\ (x,y) \in F\}$. Tedy vzor F při φ_+ je obrazem kompaktní množiny $F \subset S$ při spojitém zobrazení $(x,y) \mapsto x$, a je tedy kompaktní, a proto i uzavřenou podmnožinou I. Zobrazení $\varphi_+\colon I \to \mathbb{R}$ je tudíž spojité. Proto je množina $\varphi_+(I)$ souvislá. Totéž platí o zobrazení $\varphi_-(x) = (x, y_-(x))$ a grafu y_-. Množina $\varphi_-(I)$ je tedy souvislá z podobných důvodů. Množiny $\varphi_+(I)$ a $\varphi_-(I)$ jsou souvislé, jejich sjednocení je rovno S a tyto dvě množiny mají neprázdný průnik (např. bod $(x_0, 0)$ leží v obou těchto množinách). Množina S je tedy sjednocením dvou souvislých podmnožin, které se protínají, a je proto souvislá. ■

8. Lokální vlastnosti funkcí více proměnných

§53. Limita a spojitost funkcí více proměnných. V tomto paragrafu spočteme několik příkladů na uvedené pojmy. Upozorňujeme ale na to, že i v [Z, 2.12 a 2.13] lze nalézt několik řešených příkladů.

Mnohokrát užijeme tvrzení souvislosti mezi limitou a spojitostí:

Funkce (zobrazení) f z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$ je spojitá v $a \in \mathbb{R}^m$, právě když $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Kromě vět o souvislosti mezi pojmem limity reálné funkce a aritmetickými operacemi, případně nerovnostmi, které budeme bez dalšího používat, připomeňme zejména větu o limitě složeného zobrazení:

Nechť g je zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$, h je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^p$, $\lim\limits_{v\to a} g(v) = b$ a $\lim\limits_{w\to b} h(w) = c$. Je-li navíc splněno, že $g(v)$ je různé od b na nějakém prstencovém okolí a, pak je $\lim\limits_{v\to a}(h \circ g)(v) = c$, tj. limita složeného zobrazení se za uvedených předpokladů rovná limitě „vnějšího“ zobrazení v odpovídajícím bodě.

Poznámka. Jistě se setkáte i s následující variantou předchozího tvrzení:

Nechť g je zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$, h je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^p$, $\lim\limits_{v\to a} g(v) = b$ a h je spojité v b. Pak $\lim\limits_{v\to a}(h \circ g)(v) = h(b)$.

Použití tohoto tvrzení je o poznání jednodušší a pohodlnější, než je tomu v případě předchozího tvrzení, a tak příklad na to neuvádíme.

<u>P ř í k l a d</u> Lze funkci $\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

Řešení. Pro $x^2 + y^2 \neq 0$, t.j. $(x,y) \neq (0,0)$, je zadaná funkce podílem funkcí $\sin xy$ a $\sqrt{x^2+y^2}$. Funkce $\sin xy$ je složením spojité funkce $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a polynomu

xy. Funkce $\sqrt{x^2+y^2}$ je složením funkce $\sqrt{\cdot}$, která je spojitá na intervalu $[0,\infty)$ s polynomem x^2+y^2, jehož hodnoty jsou nezáporné. Připomeňme si, že polynomy dvou proměnných jsou spojité funkce na $\mathbb{R}^2$, neboť je lze popsat pomocí spojitých funkcí (projekcí) $(x,y)\mapsto x$ a $(x,y)\mapsto y$ a operací násobení a sčítání, které spojitost zachovávají. Funkce $\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je tedy spojitá na $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, protože $\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$ pro $(x,y)\neq(0,0)$. Proto ji lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$, právě když má vlastní limitu v počátku. Je

$$\frac{|\sin xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Funkce $\sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá v počátku (viz výše), a její limita v počátku je tedy rovna její hodnotě tamtéž, t.j. nule. Protože absolutní hodnota naší funkce je omezena zdola nulovou funkcí a shora funkcí s nulovou limitou v počátku, má v počátku limitu nula.

(Jiné zdůvodnění: Je $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \frac{\sin xy}{xy}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. První zlomek má limitu jedna pomocí věty o limitě složené funkce (užijeme ji na vnější funkci $\frac{\sin t}{t}$ a vnitřní funkci $(x,y)\mapsto xy$) a druhý zlomek má limitu nula jak bylo ukázáno výše. Protože na osách mimo počátek je funkce nulová, má limitu nula v počátku.) ∎

P ř í k l a d Lze funkci $f(x,y)=\frac{\sin xy}{x^2+y^2}$ spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

Řešení. Mohli bychom obdobně jako v minulém případě odůvodnit, že funkce je spojitá mimo počátek, kde není definovaná. Jak se ukáže, byla by to zbytečná práce, neboť neexistuje limita v počátku. Kdyby totiž existovala, tak by se podle věty o limitě složené funkce musela rovnat hodnotě $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0)$ a zároveň též $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t)$. V prvním případě jsme za vnitřní funkci (zobrazení) zvolili $\varphi(t)=(t,0)$, ve druhém $\psi(t)=(t,t)$; v obou případech je vnější funkcí funkce f. První z obou limit je rovna nule, zatímco druhá je rovna jedné polovině. Funkce f tedy nemůže mít v počátku limitu, a nelze ji tedy v počátku spojitě dodefinovat. ∎

P ř í k l a d Lze funkci $f(x,y)=\frac{\sin x+\sin y}{x+y}$ spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

Řešení. Funkce je spojitá, pokud $x+y\neq 0$. To plyne ze spojitosti funkce sinus, polynomu $x+y$ a zachovávání spojitosti při sčítání a dělení. Bude nás proto zajímat $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x+y\neq 0}} f(x,y)$ pro $a\in\mathbb{R}$. Pomocí vzorce pro součet sinů je

$$f(x,y)=\frac{\sin\frac{x+y}{2}}{\frac{x+y}{2}}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Protože $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ a $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}}\frac{x+y}{2}=0$, je hledaná limita rovna díky spojitosti funkce kosinus hodnotě $\cos a$.

Definujeme-li tedy $f(a,-a)=\cos a$ pro všechna $a\in\mathbb{R}$, je f spojitá na celém $\mathbb{R}^2$, neboť pro $a\in\mathbb{R}$ je $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x+y\neq 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,-a)\\ x+y=0}} f(x,y)=\cos a$, a tedy i $\lim\limits_{(x,y)\to(a,-a)} f(x,y)=\cos a$, jak se můžete snadno přesvědčit. ■

<u>Příklad</u> Spočtěte $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \frac{\sin x+\log(1+y)}{x+y}$.

Řešení. Uvažujeme-li funkci $\psi(t)=(t,0)$, dostáváme složením se zadanou funkcí, že limita, pokud existuje, se musí rovnat hodnotě $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

Možná až po několika pokusech dokázat, že limita je rovna jedné, dojdeme k podezření, že tomu tak být nemusí, a to zhruba proto, že jmenovatel $x+y$ může být velmi malý, zatímco hodnoty x a y významné pro velikost $\sin x$ a $\log(1+y)$ mohou být relativně větší. Tuto hrubou myšlenku zkusme realizovat tak, že budeme skládat naši funkci s funkcí $\varphi(t)=(t,-t+t^2)$, kde by se naznačený efekt mohl projevit. Pokud existuje hledaná limita, pak je dle věty o limitě složené funkce rovna

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t+\log(1-t+t^2)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t+\frac{-1+2t}{1-t+t^2}}{2t}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t+\frac{2(1-t+t^2)-(2t-1)^2}{(1-t+t^2)^2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Zde jsme dvakrát užili L'Hospitalovo pravidlo. To bylo možné, protože limity v čitateli a jmenovateli v prvních dvou limitách jsou zřejmě nulové a protože poslední limita existuje.

Protože by limita musela nabývat dvou různých hodnot, dostáváme, že nemůže existovat. ■

§54. Parciální derivace a totální diferenciál. Připomeňme si, že nejčastějším způsobem, jak zjistit existenci totálního diferenciálu a jeho hodnoty je použití následujících faktů:

Je-li f funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ taková, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ jsou spojité v bodě $a\in\mathbb{R}^n$ (jako funkce n proměnných), pak funkce f má v bodě a totální diferenciál $df(a)$.

Existuje-li totální diferenciál f v bodě a, pak existují parciální derivace f v a a $df(a)$ má v bodě $h\in\mathbb{R}^n$ hodnotu $d_hf(a)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k$.

To nám dává možnost postupovat při vyšetřování totálního diferenciálu následovně. Spočítáme parciální derivace funkce na okolí zkoumaného bodu a. Jsou-li v bodě a spojité, víme co je totální diferenciál díky oběma uvedeným tvrzením. Nejsou-li spojité, ale známe jejich hodnotu v bodě a, pak víme díky druhému uvedenému tvrzení, co je totálním diferenciálem, pokud existuje. Zda je to skutečně diferenciál či nikoliv, to zjistíme užitím definice totálního diferenciálu.

Nutnou podmínku pro existenci totálního diferenciálu, která může ulehčit důkaz neexistence diferenciálu, dává tvrzení:

Existuje-li totální diferenciál reálné funkce n proměnných f v bodě $a \in \mathbb{R}^n$, pak je f v bodě a spojitá.

<u>Příklad</u> Dodefinujte funkci $f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ na $\mathbb{R}^2$ tak, aby měla totální diferenciál ve všech bodech a spočtěte ho.

Řešení. Pro $(x,y) \in G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je funkce definovaná a snadno spočteme její parciální derivace:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2)-x^3y2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3(x^2+y^2)-x^3y2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

To jsou spojité funkce dvou proměnných na G, neboť jsou to racionální funkce na svém definičním oboru. Proto má funkce f na G totální diferenciál, přičemž ten je v bodě $(x,y) \in G$ zobrazením

$df(x,y)\colon (h_1,h_2) \mapsto \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_1 + \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}h_2$.

Má-li být f rozšířena na $\mathbb{R}^2$ tak, aby měla totální diferenciál, musí být rozšířena spojitě. Protože $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 0$, je nutnou podmínkou pro takové rozšíření, že $f(0,0) = 0$. Dodefinujeme proto f v počátku nulou a uvažujeme, zda má totální diferenciál v počátku. Protože nyní máme $f(x,0) = f(0,y) = 0$ pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$, jsou obě parciální derivace funkce f v počátku nulové z definice. Existuje-li totální diferenciál, musí platit, že $df(0,0)\colon (h_1,h_2) \mapsto 0$, tedy, že je to nulová lineární forma. Ověříme, že ta je totálním diferenciálem f v počátku podle definice:

Položme

$$\varepsilon(h_1,h_2) = \frac{|f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) - d_{(h_1,h_2)}f(0,0)|}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{|h_1^2h_1h_2|}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq$$

$$\leq \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\frac{h_1^2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \leq \|(h_1,h_2)\|.$$

Je tedy $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$ a totální diferenciál f v počátku je roven nulové formě dle definice. ■

<u>Příklad</u> Vyšetřete, zda funkci $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}\log(1+xy)$ lze dodefinovat na nějakém okolí počátku tak, aby v něm měla totální diferenciál.

Řešení. Protože funkce xy je spojitá v počátku a má v něm hodnotu nula, je na nějakém okolí počátku její hodnota větší než -1 a funkce f je na příslušném prstencovém okolí počátku definovaná.

Má-li funkce mít totální diferenciál v počátku, musí v něm být dokonce spojitá. Protože $f(0,y) = 0$ pro všechna $y \neq 0$, je jedinou možností, jak dodefinovat f v počátku, položit $f(0,0) = 0$.

Protože nyní je $f(0,y) = f(x,0) = 0$ pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$, tak parciální derivace v počátku jsou nulové. Jediným možným kandidátem na totální diferenciál v počátku je tedy nulová lineární forma na $\mathbb{R}^2$. Je-li skutečně totálním diferenciálem, pak podle definice musí platit, že $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$. Složíme-li ovšem zkoumanou funkci proměnných h_1, h_2 v prstencovém okolí počátku s funkcí $t \mapsto (t,t)$, pak zjistíme, že limita pro $t \to 0_+$ je rovna $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a to je ve sporu s větou o limitě složené funkce.

(Poznamenejme, že pokud bychom vyšetřovali napřed parciální derivace funkce f v okolí počátku, pak bychom po jistém úsilí s jejich výpočtem a se zkoumáním limity zjistili, že nejsou v počátku spojité. Neexistenci limity bychom mohli dokázat též zkoumáním „po osách" a „po diagonále", tedy skládáním s $t \mapsto (t,0)$, $t \mapsto (0,t)$ a $t \mapsto (t,t)$. Tím bychom ovšem dospěli k tomu, že tato cesta k cíli nevede a pak bychom jistě přistoupili ke zkoumání diferenciálu podle definice jako výše. Protože funkci f lze spojitě dodefinovat nulou v počátku, nelze nutnou podmínku spojitosti užít k vyvrácení existence diferenciálu v tomto případě. Je proto dobré získat cit pro to, kterému postupu dát přednost, abychom aspoň nad jednoduššími příklady neztráceli příliš mnoho času.) ■

§55. Derivace ve směru. K výpočtu derivace ve směru je často výhodné užít totální diferenciál, pokud existuje:

Existuje-li totální diferenciál $df(a)$ funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, pak derivace ve směru $h \in \mathbb{R}^n$ ($\partial_h f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$) je rovna hodnotě $d_h f(a)$ tohoto diferenciálu v h. Poznamenejme, že geometrické představě směru odpovídají jen nenulová h a že někdy se o derivaci ve směru mluví jen v případě, že $\|h\| = 1$.

Příklad Spočtěte derivaci funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$ v bodě $(1,1)$ ve směru $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$.

Řešení. Parciální derivace jsou $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+x^2y^2}$. To jsou funkce dvou proměnných, které jsou spojité na $\mathbb{R}^2$, speciálně jsou spojité v bodě $(1,1)$. Funkce f má tedy totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a derivace f v bodě $(1,1)$ ve směru $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ je rovna hodnotě totálního diferenciálu $df(1,1)$ v bodě $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, tedy je rovna $\frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. ■

§56. Tečná nadrovina. Existuje-li totální diferenciál reálné funkce více proměnných, můžeme mluvit o tečné nadrovině k jejímu grafu:

Má-li funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ totální diferenciál v bodě a, pak graf zobrazení $x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(a) + d_{x-a}f(a)$, (t.j. množina

$$(a, f(a)) + L = \{(a, f(a)) + (\xi, \eta) \colon a \in \mathbb{R}^n,\ (\xi, \eta) \in L\},$$

kde L je graf zobrazení $df(a)$) je tečnou nadrovinou ke grafu f v bodě $(a, f(a))$.

Příklad Nechť T je tečná rovina ke grafu funkce $p(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$, která je kolmá k přímce $\{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T „osu x" (t.j. přímku $\{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3; t \in \mathbb{R}\}$)?

Řešení. Totální diferenciál funkce p v libovolném bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existuje, protože parciální derivace $\frac{\partial p}{\partial x}(x, y) = -2x + 2$ a $\frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = -2y + 4$, a to jsou spojité funkce dvou proměnných. Tečná rovina ke grafu funkce p v bodě $(x_0, y_0, p(x_0, y_0))$ je tedy

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2,\\ z = p(x_0, y_0) + (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y + 4)(y - y_0)\}.$$

Má-li být kolmá k (násobkům) vektoru $(1, 1, 1)$, musí být vektor

$$(x - x_0, y - y_0, (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y_0 + 4)(y - y_0))$$

kolmý k $(1, 1, 1)$ pro každá $x, y \in \mathbb{R}^2$. Skalární součin těchto vektorů

$$x - x_0 + y - y_0 + (-2x_0 + 2)(x - x_0) + (-2y + 4)(y - y_0)$$

musí být roven nule pro každá $x, y \in \mathbb{R}$. Musí být tedy $3 - 2x_0 = 5 - 2y_0 = 0$. Máme tedy $T = \{(x, y, p(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) - (x - \frac{3}{2}) - (y - \frac{5}{2}))\colon x, y \in \mathbb{R}\}$. Položíme-li $x = y = 0$, dostáváme, že hledaný bod na ose z je $(0, 0, \frac{17}{2})$. ■

§57. Druhý diferenciál a konvexita. Druhým diferenciálem funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě a se v moderní literatuře obvykle rozumí symetrická bilineární forma $d^2 f(a)$, pro kterou platí $d^2 f(a)(s, t) = d_t(d_s f)(a)$ pro libovolná $s, t \in \mathbb{R}^n$. Při zkoumání vlastností funkce f nás bude zajímat především kvadratická forma $h \mapsto d^2 f(a)(h, h)$, která ovšem jednoznačně určuje symetrickou bilineární formu druhého diferenciálu, a proto nedojdeme ke špatným výsledkům, i když budeme za druhý diferenciál považovat tuto kvadratickou formu (jak tomu je např. v [DII]). Navíc si připomeňme, že (odpovídající) kvadratická či bilineární forma druhého diferenciálu je určena symetrickou čtvercovou (Hessovou) maticí druhých parciálních derivací $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{i,j=1,\ldots,n}$[2] a že druhý diferenciál v a existuje, pokud jsou všechny druhé parciální derivace spojité na nějakém okolí bodu a.

Ani libovolně hladké funkce více proměnných, na rozdíl od funkcí jedné proměnné, nemusí být konvexní ani konkávní na žádné otevřené konvexní podmnožině definičního oboru (např. $f(x, y) = x^2 - y^2$). Pro reálnou funkci $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, která má spojité druhé parciální derivace na otevřené podmnožině $\mathbb{R}^n$ tedy může mít množina bodů a, ve kterých je f „lokálně konvexní (konkávní)" (existuje otevřená koule se středem a, na které je f konvexní (konkávní)) doplněk s neprázdným vnitřkem. Vyšetřování („lokální") konvexity (konkávnosti) se nám ovšem bude hodit při hledání lokálních extrémů a absolutních extrémů funkcí. Platí následující postačující podmínky:

[2]Užíváme klasické značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a)$. Často se můžete setkat s obráceným značením. V případě Hessovy matice to ovšem díky její symetrii nehraje roli.

Nechť $f\colon G \to \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace na konvexní otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ a kvadratická forma druhého diferenciálu (ekvivalentně Hessova matice) je pozitivně semidefinitní (pozitivně definitní) na G. Pak je f konvexní (ryze konvexní) na G. Speciálně, je-li Hessova matice f v bodě a pozitivně definitní, je f „lokálně konvexní“ ve výše uvedeném smyslu. Stejné vztahy platí mezi negativní semidefinitností (negativní definitností) Hessovy matice a konkávností (ryzí konkávností) funkce. Je-li Hessova matice indefinitní v nějakém bodě, pak funkce f není ani konvexní ani konkávní na žádném okolí tohoto bodu.

K vyšetření toho, že kvadratická forma $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nebo matice Q je pozitivně definitní, můžeme užít definice, tedy vyšetřovat, zda $q(x) > 0$ nebo zda $\langle Qx, x\rangle > O$ pro $x \neq 0$. Připomeňme, že pozitivní semidefinitnost je definována pomocí předchozích vztahů s neostrými nerovnostmi a že negativní definitnost a negativní semidefinitnost dostaneme, když v předchozích nerovnostech zaměníme nerovnosti $>$ za $<$, resp. $\geq$ za $\leq$.[3] Vhodnou pomůckou pro vyšetřování definitnosti kvadratických forem pro nepříliš velká n je tzv. Sylvestrovo pravidlo.

Nechť $Q = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je čtvercová matice typu $n \times n$. Uvažujme „levé horní hlavní subdeterminanty“ d_k, tj. determinanty čtvercových matic $(a_{ij})_{i,j=1}^k$ pro $k = 1, \dots, n$. Jsou-li všechny kladné, pak je Q pozitivně definitní. Jsou-li záporné pro k lichá a kladné pro k sudá, pak je Q negativně definitní. Označme determinant matice $(a_{i,j}\colon i \in K, j \in K)$, kde K je libovolná neprázdná podmnožina $\{1, \dots, n\}$, symbolem d_K. Jsou-li všechny „hlavní subdeterminanty“ d_K matice Q nezáporné, je Q pozitivně semidefinitní. Je-li $d_K \leq 0$, pokud K obsahuje lichý počet prvků a $d_K \geq 0$, pokud K obsahuje sudý počet prvků, pak je Q negativně semidefinitní. V ostatních případech je matice Q indefinitní.

Příklad Najděte maximální otevřené konvexní podmnožiny $\mathbb{R}^2$, na kterých je funkce $f(x, y) = x^3 - y^3 + xy^2 - 1$ ryze konvexní (ryze konkávní).

Řešení. Jde o polynom ve dvou proměnných. Ten má spojité parciální derivace libovolného řádu. Má tedy v každém bodě druhý diferenciál. Pokusíme se proto vyšetřovat konvexitu a konkávnost pomocí druhých parciálních derivací. Hessova matice druhých parciálních derivací v bodě (x, y) je

$$\begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & -6y + 2x \end{pmatrix}.$$

Levé horní hlavní subdeterminanty této matice jsou rovny $d_1(x, y) = 6x$ a $d_2(x, y) = 4(3x^2 - y^2 - 9xy)$. Řešením kvadratické rovnice $y^2 + 9xy - 3x^2 = 0$ pro pevné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme řešení $y_+(x) = \frac{1}{2}(-9x + |x|\sqrt{93})$ a (pro $x \neq 0$ odlišné řešení $y_-(x) = \frac{1}{2}(-9x - |x|\sqrt{93})$. Nyní je zřejmé, že na množině

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y \in (y_-(x), y_+(x))\}$$

[3] Někteří autoři považují za pozitivně semidefinitní pouze takové matice, které jsou podle uvedené definice pozitivně semidefinitní, ale ne pozitivně definitní.

jsou $d_1(x, y)$ i $d_2(x, y)$ kladné a Hessova matice je pozitivně definitní. Na množině

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0,\ y \in (y_-(x), y_+(x))\}$$

je $d_1(x, y) < 0$ a $d_2(x, y) > 0$, a matice je tedy negativně definitní. Na množině $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > y_+(x) \text{ nebo } y < y_-(x)\}$ je matice indefinitní. Povšimněme si, že množiny P i N jsou konvexní, a tak máme díky výše řečenému, že funkce f je ryze konvexní na P a ryze konkávní na N. Protože okolí každého bodu (x, y) roviny, který neleží v $P \cup N$ obsahuje otevřenou podmnožinu I, neleží žádný takový bod v otevřené množině, na které je f konvexní nebo konkávní.

Závěrem tedy shrňme, že množina P, resp. N, je maximální otevřená konvexní taková, že f je na ní ryze konvexní, resp. ryze konkávní. ■

9. Lokální extrémy

Jedním z pojmů, které slouží k popisu chování funkce více proměnných, je pojem lokálního extrému. Připomeňme stručně, že funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ lokální maximum, jestliže existuje kladné číslo r takové, že $f(x) \leq f(a)$, pokud $0 < \|x - a\| < r$. Nahradíme-li neostrou nerovnost ostrou, hovoříme o ostrém lokálním maximu. Pokud ji nahradíme opačnou neostrou či ostrou nerovností, jde o lokální minimum či o ostré lokální minimum. Pokud $a \in M$ a příslušná nerovnost platí pro všechna $x \in M \subset \mathbb{R}^n$, pro která je $0 < \|x - a\| < r$, jde o příslušný lokální extrém vzhledem k množině M.

Úlohou vyšetřit lokální extrémy budeme vždy rozumět nalezení všech bodů, ve kterých funkce má lokální extrém a určení typu lokálního extrému v každém z těchto bodů.

§58. Vztahy mezi extrémy různého druhu. Kromě možnosti nalézt bod, ve kterém funkce nabývá lokální extrém, a dokázat tento fakt přímo pomocí definice, existuje několik cest, jak k takovému výsledku dospět pohodlněji. V některých případech můžeme použít jednoduché pozorování.

V každém vnitřním bodě a definičního oboru funkce f, ve kterém f nabývá maxima (minima), má f též lokální maximum (lokální minimum).

Vyšetřování (globálních) extrémů je věnován oddíl 10, proto se zde užitím zmíněného faktu nebudeme zabývat. Ukážeme si ale užití následujícího jednoduchého pozorování pro studium lokálních extrémů.

Má-li funkce f v bodě a lokální maximum (lokální minimum) a $a \in M \subset \mathbb{R}^n$, pak funkce f nabývá v a lokálního extrému stejného typu vzhledem k množině M.

<u>Příklad</u> Vyšetřete všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^2 + |\operatorname{arctg} y| - x^8.$$

Řešení. Předpokládejme, že funkce f v bodě $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ lokální extrém. Pak ho v tomto bodě má i vzhledem k přímce $\{(a,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$. Protože funkce jedné proměnné $|\operatorname{arctg} y|$ má jediný lokální extrém, a to (ostré lokální) minimum v bodě nula, je $b = 0$ a funkce f má v (a,b) lokální minimum. Podobně funkce $x^2 - x^8$ jako funkce jedné proměnné má lokální minimum jedině v bodě $x = 0$. Funkce f může proto mít lokální minimum jedině v počátku. Protože zřejmě platí, že $f(x,y) > 0$ pro $(x,y) \neq (0,0)$ a $|x| < 1$, tak má f ostré lokální minimum v počátku. Díky provedené úvaze již víme, že je to jediný lokální extrém funkce f.

(Zde i dále předpokládáme, že čtenář zná metody pro vyšetřování extrémů funkcí jedné proměnné. Lze se s nimi seznámit v [Z, Kap. 2, §§43, 44].) ■

§59. Vyšetřování lokálních extrémů funkcí lze někdy **převést na vyšetřování lokálních extrémů jednodušších funkcí.**

<u>Příklad</u> Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = (|x| + |y|)^2 - (|x| + |y|)^4.$$

Řešení. Povšimněme si, že funkce f je rovna $g \circ \varphi$, kde $g(r) = r^2 - r^4$ a $\varphi(x,y) = |x| + |y|$. To umožní vyvodit vše potřebné o lokálních extrémech f pomocí lokálních extrémů g. Protože $g'(r) = 2r - 4r^3$ na $\mathbb{R}$ a nulu nabývá pro $r = 0$ a $|r| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Jediné body, ve kterých může mít g lokální extrém, jsou nula, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ a $-\sqrt{\frac{1}{2}}$. Je $g''(0) = 2 > 0$ a $g''(r) = -4 < 0$, je-li $|r| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Funkce g má tedy v nule ostré lokální minimum a v bodech $\sqrt{\frac{1}{2}}$ a $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ má ostrá lokální maxima (lze zjistit, že tam nabývá maximálních hodnot; rozmyslete si jak).

Je-li $\varphi(a,b) = 0$, je (a,b) počátek. Nechť $V \subset \mathbb{R}$ je okolí nuly takové, že $g(r) > 0$ pro $r \in V \setminus \{0\}$. Protože je φ spojitá, existuje okolí U počátku takové, že $\varphi(U) \subset V$. Navíc počátek je jediným bodem s nulovým obrazem. Odtud máme, že $f(x,y) = g(\varphi(x,y)) > f(0,0)$ pro všechna $(x,y) \in U$ různá od počátku a f má v počátku ostré lokální minimum.

Je-li $|a| + |b| = \sqrt{\frac{1}{2}}$ a $V \subset \mathbb{R}$ je okolí $\sqrt{\frac{1}{2}}$ takové, že $g(r) \leq g(\sqrt{\frac{1}{2}})$ pro $r \in V$, pak existuje okolí U bodu (a,b) takové, že $\varphi(U) \subset V$. Pro $(x,y) \in U$ máme tedy, že $f(x,y) = g(\varphi(x,y)) \leq f(a,b)$. V bodě (a,b) má tedy f lokální maximum. Protože v každém okolí bodu $(a,b) \neq (0,0)$ leží bod (a',b') takový, že $\varphi(a,b) = \varphi(a',b')$, tak nejde o ostré lokální maximum.

Třetí případ, t.j. $\varphi(a,b) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ zřejmě nemůže nastat.

Zbývá ověřit, že funkce f nemá jiné lokální extrémy. Uvažujme bod (a,b) takový, že $\varphi(a,b) \neq 0$ a $\varphi(a,b) \neq \sqrt{\frac{1}{2}}$. Kdyby nyní $f = g \circ \varphi$ měla v (a,b) lokální extrém, měla by v tomto bodě (lokální) extrém na nějakém okolí

$$U = \{(x,y);\ (x-a)^2 + (y-b)^2 < r\},\ r > 0,$$

bodu (a,b). Pak obraz U při funkci φ obsahuje nějaké okolí V bodu $\varphi(a,b)$. O tom se přesvědčíme, když si povšimneme, že

$$\begin{aligned}\varphi(U) \supset \varphi(\{(x,b)\colon |x-a| < r\}) &= \{|x| + |b|\colon |x-a| < r\} = \\ &= (|a| + |b| - r, |a| + |b| + r) = (\varphi(a,b) - r, \varphi(a,b) + r).\end{aligned}$$

Na V má zřejmě $g \restriction V$ extrém v bodě $\varphi(a,b)$, což je vnitřní bod V, a to je spor s tím, že g v bodě $\varphi(a,b)$ lokální extrém nemá. ■

§**60.** **Stacionární body.** Nejčastější a nejúčinnější metody vyšetřování lokálních extrémů jsou založeny na použití diferenciálního počtu pro funkce více proměnných. V prvé řadě dostáváme užitečné nutné podmínky.

Pokud f nabývá v bodě a lokálního extrému, a má derivaci

$$\partial_h f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

ve směru $h \in \mathbb{R}^n$ v bodě a, pak je tato derivace rovna nule.

Tato nutná podmínka často umožňuje omezit se na několik „podezřelých bodů“, mezi kterými leží všechny body, ve kterých f má lokální extrém. Poznamenejme, že v případě, že jsou parciální derivace spojité ve zkoumaném bodě, existuje totální diferenciál a nulovost derivací ve směru je ekvivalentní nulovosti parciálních derivací. Body, ve kterých má funkce f nulový totální diferenciál, jsou „stacionárními body“ funkce f (srovnejte s [Z, Kap. 2, §44]).

P ř í k l a d Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2}$. Vyšetřete též lokální extrémy funkce f vzhledem k jejímu definičnímu oboru.

Řešení. Budeme nejprve hledat body uvnitř definičního oboru M, t.j. v množině $M^o = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 < 1\}$, ve kterých má funkce f lokální extrém. Na M^0 existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(1-2x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(1-x^2-2y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Jedinými body, ve kterých jsou obě nulové, jsou $(0,0)$ a všechny čtyři body (a,b) takové, že $|a| = |b| = \sqrt{\frac{1}{3}}$. V jiném bodě definičního oboru nemůže mít f lokální extrém, protože je v něm některá parciální derivace nenulová nebo nejde o vnitřní bod M. Uvažujme vyjmenované body.

V počátku funkce f nemá lokální extrém, neboť v každém okolí počátku najdeme dvojici bodů $(x_1, y_1) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ a $(x_2, y_2) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n})$ pro dostatečně velké přirozené n, přičemž $f(x_1, y_1) > f(0,0) = 0 > f(x_2, y_2)$. Funkce f tedy nemá lokální extrém v počátku.

Funkce f je spojitá na omezené a uzavřené množině M, tedy nabývá na ní svého minima i maxima. Protože na hranici je rovna nule, má funkce f v bodě, kde nabývá globální maximum též lokální maximum. Maximální hodnotou je největší z těch, které f nabývá ve čtyřech zbývajících „podezřelých bodech", tedy $f(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}) = f(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$. Podobně nabývá funkce f svého minima v bodech $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$ a $(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$, kde má nutně též lokální minima. Protože v dostatečně malém okolí zmíněných čtyř bodů neleží další body, kde funkce nabývá maxima nebo minima, jde dokonce o ostré lokální extrémy. Tím jsme vyšetřili všechny lokální extrémy funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$.

Uvažujme nyní body hranice množiny M, tedy body (a, b), pro které $a^2+b^2 = 1$, a tedy $f(a, b) = 0$. Pokud je $ab \neq 0$, mají hodnoty f zřejmě na nějakém okolí bodu (a, b) v M stejné znaménko nebo jsou nulové. Funkce má tedy ve všech bodech, kde $ab > 0$ a $a^2 + b^2 = 1$, lokální minimum a v bodech kde $ab < 0$ a $a^2 + b^2 = 1$ lokální maximum. Ani jeden z těchto extrémů není ostrý. V bodech hranice, kde $ab = 0$ najdeme v libovolně malém okolí bod, kde je hodnota f kladná i bod, kde je záporná. Např. body $(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$, $(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$ v okolí bodu $(0, 1)$ pro dost velká $n \in \mathbb{N}$ ap. v okolí zbylých třech bodů. Funkce f tedy nemá v těchto čtyřech bodech hranice lokální extrém. ■

§**61. Postačující podmínka a druhý diferenciál.** Často je komplikovanější rozhodnout o konkrétním „podezřelém bodě", zda jde skutečně o bod lokálního extrému. K tomu může sloužit následující postačující podmínka užívající druhý diferenciál. Připomeňme si, že existenci druhého diferenciálu nejčastěji ověříme tím, že zjistíme, že druhé parciální derivace funkce jsou na okolí příslušného bodu spojité.

Pokud má f v bodě a nulový první diferenciál $df(a)$ a kvadratická forma druhého diferenciálu, $h \mapsto d^2f(a)(h, h)$, je pozitivně definitní, tj. druhý diferenciál existuje a (Hessova) matice druhých parciálních derivací v bodě a je pozitivně definitní, pak má f v bodě a ostré lokální minimum. Pokud je $df(a) = 0$ a $d^2f(a)(h, h)$ je negativně definitní, má f v a ostré lokální maximum. Pokud je $d^2f(a)(h, h)$ indefinitní, t.j. není ani pozitivně ani negativně semidefinitní, nemá f v a lokální extrém.

<u>P ř í k l a d</u> Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ definované na množině $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xyz \neq 0\}$.

Řešení. Protože jde o otevřenou množinu, na které má funkce f spojité parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 + \frac{y^2}{4}(-\frac{1}{x^2})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{2y}{4x} - \frac{z^2}{y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}$, je nutnou podmínkou pro to, aby v bodě (a, b, c) měla f lokální extrém to, aby byly všechny tyto parciální derivace nulové. Nulové body v G jsou jedině body $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ a $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$.

Spočteme nyní druhé parciální derivace funkce f na G. Dostáváme, že

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & \frac{-y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}.$$

Druhé parciální derivace na G jsou spojité a existuje tedy druhý totální diferenciál f v každém bodě G. Ve „stacionárních“ bodech $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ a $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$ spočteme hlavní subdeterminanty příslušné levým horním čtvercovým submaticím typu 1×1, 2×2 a 3×3. V prvním případě dostáváme hodnoty 4, 8 a 32, které jsou kladné a podle Sylvestrova pravidla je matice druhých parciálních derivací (ekvivalentně kvadratická forma druhého diferenciálu) pozitivně definitní a funkce f má v bodě $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ ostré lokální minimum. Dosadíme-li bod $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$, pak vychází, že tytéž tři subdeterminanty jsou rovny číslům -4, 8 a -32; matice druhých parciálních derivací je v tomto případě negativně definitní a funkce f má proto v bodě $(-\frac{1}{2}, -1, -1)$ ostré lokální maximum. ■

Uvedená postačující podmínka neříká nic pro případ semidefinitnosti kvadratické formy druhého diferenciálu a neumožňuje určit lokální extrémy, které nejsou ostré. Dává však možnost studovat i případy, kdy je kvadratická forma druhého diferenciálu indefinitní.

<u>P ř í k l a d</u> Vyšetřete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = 27xy^2 + 14x^3 - 69x - 54y$$

na $\mathbb{R}^2$.

Řešení. První parciální derivace jsou spojité na $\mathbb{R}^2$. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 27y^2 + 42x^2 - 69 \text{ a } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 54xy - 54.$$

Je-li (a, b) stacionární bod, je $ab = 1$ z podmínky $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ a řešením kvadratické rovnice $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{b}, b) = 9c^2 - 23c + 14 = 0$, kde $c = b^2$, dojdeme k tomu, že jedinými čtyřmi body, kde jsou obě první parciální derivace nulové, jsou $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{14}}{3})$ a $(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{\sqrt{14}}{3})$. Vyšetříme nyní druhé parciální derivace v těchto bodech. Matice druhých parciálních derivací v bodě (x, y) je

$$\begin{pmatrix} 84x & 54y \\ 54y & 54x \end{pmatrix}.$$

Funkce f má v bodě $(1,1)$ ostré lokální minimum, neboť výpočtem snadno ověříme, že matice druhých parciálních derivací v tomto bodě má kladné levé horní hlavní subdeterminanty. Podobně f má v bodě $(-1,-1)$ ostré lokální maximum, neboť matice druhých parciálních derivací má v tomto bodě levé horní hlavní subdeterminant typu 1×1 záporný a její determinant je kladný a konečně ve dvou zbylých bodech vychází determinant matice záporný, a tedy forma není semidefinitní, je tudíž indefinitní a funkce f nemá v těchto bodech lokální extrém.

Při zkoumání kvadratické formy definované výše uvedenou maticí bychom mohli postupovat též takto. Pro $(a,b) = (1,1)$ jde o kvadratickou formu

$$84h_1^2 + 108h_1h_2 + 54h_2^2 = 30h_1^2 + 54(h_1 + h_2)^2 > 0,$$

pokud $(h_1,h_2) \neq 0$. V bodě $(1,1)$ má tedy f ostré lokální minimum. Pro $(x,y) = (\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{14}}{3})$ jde o kvadratickou formu $84\frac{3}{\sqrt{14}}h_1^2 + 108\frac{\sqrt{14}}{3}h_1h_2 + 54\frac{3}{\sqrt{14}}h_2^2$, jejíž hodnota je v $(h_1,h_2) = (1,0)$ kladná a v $(h_1,h_2) = (1,-1)$ záporná. Forma je v tomto případě indefinitní a v bodě $(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{\sqrt{14}}{3})$ nemá f lokální extrém.

Protože $f(-x,-y) = -f(x,y)$, má funkce f v bodě $(-1,-1)$ ostré lokální maximum a v bodě $(-\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{\sqrt{14}}{3})$ nemá lokální extrém. ■

Ne vždy však bude kritérium užívající druhý diferenciál účinné.

<u>P ř í k l a d</u> Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = (1 - x^4 - y^2)(x^2 - 1)$ na $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Parciální derivace jsou $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6x^5 + 4x^3 + 2x - 2xy^2$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y(x^2-1)$. Obě tyto parciální derivace se rovnají nule, právě když $(x,y) = (0,0)$, $(x,y) = (1,0)$ nebo $(x,y) = (-1,0)$. Přitom jsme např. zvážili možnost, že parciální derivace podle y je nulová díky rovnosti $y = 0$ a parciální derivace podle x díky rovnosti $-6x^4 + 4x^2 + 2 = 0$. Poslední rovnost totiž vede k tomu, že $x^2 = 1$ nebo $x^2 = -\frac{1}{3}$. Poslední případ však zřejmě nepřichází v úvahu. Druhé parciální derivace funkce f jsou spojité na $\mathbb{R}^2$. Matice druhých derivací je v bodě $(0,0)$ rovna

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

což je pozitivně definitní matice, a funkce f má v bodě $(0,0)$ ostré lokální minimum. Ve zbývajících dvou stacionárních bodech je matice druhých parciálních derivací negativně semidefinitní, totiž v obou případech je rovna matici

$$\begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a to nám nedává žádnou odpověď na problém lokálních extrémů v těchto bodech. Provedeme proto jednoduchou úvahu. Pokud $y = 0$, je hodnota funkce záporná pro

$x \in (-1,1)$. Zvolíme-li $x(\varepsilon) = \sqrt[4]{1-\varepsilon}$ a $y(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$, pak pro libovolné okolí U bodu $(1,0)$ najdeme dosti malé kladné ε tak, že $(x(\varepsilon), y(\varepsilon)) \in U$ a přitom máme $f(x(\varepsilon), y(\varepsilon)) > 0$. Funkce f tedy nemá v bodě $(1,0)$ lokální extrém a totéž platí i pro bod $(-1,0)$ díky tomu, že $f(-x,-y) = f(x,y)$. Jediným bodem, kde funkce f má lokální extrém je tedy bod $(0,0)$ a v něm má ostré lokální minimum. ∎

§62. **Postačující podmínka a konvexita.** V tomto krátkém paragrafu si ukážeme, jak lze užít následující fakt.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená konvexní množina a funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in G$ nulové parciální derivace (bod a je stacionárním bodem funkce f).

Je-li f konvexní (konkávní) na G, pak v a nabývá f svého minima (maxima) na G.

Je-li f ryze konvexní (ryze konkávní) na G, pak a je jediným bodem minima (maxima) f na G (a tedy je a bodem příslušného ostrého lokálního extrému).

P ř í k l a d Nechť $f(x,y) = x^4 + y^6 - x^5y^6$ na $\mathbb{R}^2$. Najděte všechny lokální extrémy funkce f.

Řešení. Funkce f je polynomem, a má proto spojité druhé parciální derivace na $\mathbb{R}^2$. Body (x,y), ve kterých má lokální extrém, jsou tedy stacionární, tj. platí v nich $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 5x^4y^6 = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y^5 - 6x^5y^5 = 0$. Řešením rovnic dostáváme, že stacionárními body jsou $(0,0)$, $(1, \sqrt[6]{\frac{4}{5}})$ a $(1, -\sqrt[6]{\frac{4}{5}})$. Nyní uvažujme Hessovu matici funkce f, tj.

$$\begin{pmatrix} 12x^2 - 20x^3y^6 & 30x^4y^5 \\ 30x^4y^5 & 30y^4(1-x^5) \end{pmatrix}.$$

V bodech $(1, \sqrt[6]{\frac{4}{5}})$ a $(1, -\sqrt[6]{\frac{4}{5}})$ dostáváme, že determinant Hessovy matice je záporný, tudíž matice je indefinitní a lokální extrém v těchto bodech funkce nenabývá. V bodě $(0,0)$ je matice nulová, tedy je pozitivně i negativně semidefinitní, z čehož nelze bezprostředně nic usoudit. Všimneme si ovšem, že matice je pozitivně semidefinitní dokonce pro všechny body z nějakého okolí počátku:

Užijeme Sylvestrovo pravidlo.

Levý horní člen Hessovy matice $x^2(12 - 20x^3y^6)$ je na okolí počátku nezáporný (funkce x^2 je nezáporná a spojitá funkce $12 - 20y^6$ je na okolí počátku kladná).

Podobně lze vidět, že pravý dolní člen Hessovy matice $30y^4(1-x^5)$ je na okolí počátku nezáporný.

Stejně tak je na okolí počátku nezáporný determinant Hessovy matice, který je roven $30x^2y^4\big((12 - 20xy^6)(1-x^5) - 30x^6y^6\big)$.

Ze Sylvestrova pravidla je tedy Hessova matice na nějakém okolí počátku pozitivně semidefinitní. Z tvrzení v §57 je f konvexní na takovém okolí počátku, a f

má proto v počátku lokální minimum. ■

§63. Lokální extrémy vzhledem k parametricky zadaným množinám („plochám"). Uvedené metody diferenciálního počtu ovšem neumožňují hledat lokální extrémy vzhledem k množině M mezi body, které neleží v jejím vnitřku. Pro řešení tohoto problému se nabízí několik možností, které ovšem opět nejsou univerzální.

Je-li $\varphi\colon U \subset \mathbb{R}^m \to V \subset M$ homeomorfní zobrazení otevřené množiny U na relativně otevřenou množinu V v M, pak funkce $f \circ \varphi$ má v bodě $p \in U$ lokální extrém nějakého druhu, právě když funkce f má stejný druh lokálního extrému v bodě $a = \varphi(p)$ vzhledem k množině M.

Nejčastější použití tohoto pozorování se týká případu, kdy M je na okolí a možno parametrizovat hladkou φ z nějaké otevřené podmnožiny prostoru dimenze $m < n$, to jest v případě, že M je v okolí a hladkou křivkou či plochou ap.

<u>Příklad</u> Zjistěte, kolik extrémů kterého druhu má funkce $f(x,y) = xy^2$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}$.

Řešení. Uvažme zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R} \to M$ definované předpisem $\phi(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Pak $\phi(\mathbb{R}) = M$ a zobrazení ϕ je spojité. Navíc, je-li G otevřená podmnožina intervalu $(\alpha - \pi, \alpha + \pi)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\phi(G) = M \setminus \phi([\alpha - \pi, \alpha + \pi] \setminus G)$. Množina $[\alpha - \pi, \alpha + \pi] \setminus G$ je kompaktní, neboť je uzavřená v kompaktním intervalu $[\alpha - \pi, \alpha + \pi]$. Její obraz při spojitém ϕ je též kompaktní, a tedy $\phi(G)$ je relativně otevřená podmnožina M.

Proto má funkce $f \circ \phi$ lokální extrém nějakého druhu v $\alpha \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když funkce f má lokální extrém stejného druhu vzhledem k množině M v bodě $\phi(\alpha)$ (stačí se totiž omezit např. na restrikci ϕ na $(\alpha - \pi, \alpha + \pi)$).

Uvažujme tedy funkci $h(\alpha) = f \circ \phi(\alpha) = \cos\alpha \sin^2\alpha$. Je

$$h'(\alpha) = -\sin^3\alpha + \cos^2\alpha \cdot 2\sin\alpha = (\sin\alpha)(2 - 3\sin^2\alpha).$$

Stacionárními body jsou taková α, ve kterých je $\sin\alpha = 0$ nebo $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$. Druhá derivace funkce h je pak rovna $2\cos\alpha$ v těch bodech, kde $\sin\alpha = 0$, tedy v celých násobcích π, a je rovna $-4\cos\alpha$ v bodech, kde $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$. V bodech $2k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$ má tedy h ostré lokální minimum. V bodech $(2k+1)\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$ má h ostré lokální maximum. Dále v intervalu $[0, 2\pi]$ existují právě 4 body, kde $\sin^2\alpha = \frac{2}{3}$. Právě jeden takový bod α_i leží v intervalu $(i\frac{\pi}{2}, (i+1)\frac{\pi}{2})$ pro $i = 0, 1, 2, 3$. Funkce h má proto v α_0 a v α_3 druhou derivaci zápornou a v bodech α_1 a α_2 kladnou. V prvních dvou zmíněných bodech tedy má ostré lokální maximum a ve druhých dvou bodech ostré lokální minimum. Funkce ϕ je 2π-periodická, a tedy odpovídající tvrzení platí také o bodech $\alpha_i + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a $i = 0, 1, 2, 3$. Díky souvislosti mezi lokálními extrémy funkce h a funkce f máme konečně, že jedinými body, kde f má ostré lokální maximum vzhledem k M, jsou $\phi(\pi)(= \phi(\pi + 2k\pi)) = (-1, 0)$, $\phi(\alpha_0)$ a $\phi(\alpha_3)$, přičemž díky tomu, že $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ a $\alpha_3 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, je $\sin\alpha_0 > 0 > \sin\alpha_3$ a všechny tři body jsou navzájem různé. Podobně zbylé tři body $\phi(0) = (1, 0)$, $\phi(\alpha_1)$ a $\phi(\alpha_2)$ jsou navzájem různé a funkce f v nich má ostré lokální minimum vzhledem k množině M, jak plyne z výše řečeného.

Poznamenejme ještě, že hodnoty $\varphi(\alpha_i)$, $i = 0, \ldots, 4$, lze snadno spočítat ze znalosti hodnoty $\sin^2 \alpha_i$ a omezení, která na α_i máme. ■

§64. Lokální extrémy vzhledem k implicitně zadaným množinám („plochám“). Pokud je M v okolí a popsána implicitně (jako např. v předchozím příkladě), lze za příslušných předpokladů užít „větu o vázaných extrémech“.

Nechť $g \in C^1(G, \mathbb{R}^k)$, $k \leq n$ pro nějakou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$. Označme $M = \{x \in G\colon g(x) = 0 \in \mathbb{R}^k\}$. Nechť dále $f\colon G \to \mathbb{R}$ je v $C^1(G)$ a funkce f má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M. Pak matice (typu $n \times k$) prvních parciálních derivací složek zobrazení g v bodě a má hodnost menší než k nebo existuje jediný vektor $\lambda \in \mathbb{R}^k$ (jeho složkám říkáme Lagrangeovy multiplikátory) takový, že Lagrangeova funkce $f + \langle \lambda, g \rangle$ má stacionární bod v a, tj. že první parciální derivace této funkce jsou v a nulové.

Podobně jako v případě lokálních extrémů uvnitř definičního oboru, uvedeme i pro vyšetřování lokálních extrémů vzhledem k množině M pro některé body z $M \setminus M^o$ postačující podmínky formulované pomocí druhých parciálních derivací.

V některých případech, kdy lze užít větu o vázaných extrémech pro vyšetřování lokálních extrémů funkce f na množině $M = g^{-1}(0)$, může nastat to, že Lagrangeova funkce $L = f + \langle \lambda, g \rangle$ má v příslušném bodě a lokální extrém. Zde $\lambda \in \mathbb{R}^k$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů a $\langle \lambda, g \rangle$ je funkce definovaná skalárním součinem λ s hodnotou funkce g. To je možno někdy zjistit pomocí druhých parciálních derivací. Pak funkce f má v a lokální extrém vzhledem k M, neboť $f = L$ na M.

P ř í k l a d Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = y$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$.

Řešení. Funkce f má spojité parciální derivaci na $\mathbb{R}^2$, což je otevřená množina obsahující množinu $M = g^{-1}(0)$, kde $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Funkce g má též spojité parciální derivace na $\mathbb{R}^2$. Nechť $(a, b) \in M$ je takový, že f má v (a, b) lokální extrém vzhledem k M. Pak buď g má nulový diferenciál v (a, b), nebo existuje jediné $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že funkce $f + \lambda g$ má v bodě (a, b) nulový diferenciál. V prvním případě musí platit, že $3a^2 - 3b = 3b^2 - 3a = 0$, tedy $(a, b) = (0, 0)$ nebo $(a, b) = (1, 1)$. Počátek je prvkem M a musíme ho tedy dále vyšetřovat, zatímco bod $(1, 1)$ v M neleží. Hodnota f v počátku je nula. Ukážeme, že v libovolném okolí počátku leží body z M, ve kterých je f kladná i body, ve kterých je záporná.

Uvažujme (malé) kladné x pevné a spojitou funkci $g(x, .)$. Snadno se přesvědčíme, že je $g(x, 0) > 0$ a že hodnoty $g(x, -\sqrt[3]{x})$ a $g(x, x)$ jsou záporné, pokud x je dostatečně malé. Z Darbouxovy vlastnosti spojité funkce $g(x, .)$ dostáváme, že existují $y_1(x) \in (-\sqrt[3]{x}, 0)$ a $y_2(x) \in (0, x)$ taková, že $(x, y_1(x)) \in M$ a $(x, y_2(x)) \in M$. Pro libovolné okolí U počátku najdeme tedy zřejmě x tak, že oba body $(x, y_1(x))$ i

$(x, y_2(x))$ leží v U, a f tedy nemá v počátku lokální extrém.

V ostatních bodech $(a, b) \in M$, ve kterých má f lokální extrém, existuje jediné $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že funkce $f + \lambda g$ má v bodě (a, b) nulové parciální derivace, tj.

$$\begin{aligned} 3\lambda(a^2 - b) &= 0, \\ 1 + 3\lambda(b^2 - a) &= 0 \text{ a zároveň} \\ a^3 + b^3 - 3ab &= 0. \end{aligned}$$

Protože pro $\lambda = 0$ nejsou rovnice splněny, je $b = a^2$. Dosazením do třetí rovnice máme $a^3(-2 + a^3) = 0$. Protože (a, b) není počátek, je $a \neq 0$, a tudíž platí $a = \sqrt[3]{2}$. Dále je $b = (\sqrt[3]{2})^2$. To je tedy jediný kandidát na lokální extrém. Dopočtěme ještě hodnotu $\lambda = -\frac{1}{3\sqrt[3]{2}((\sqrt[3]{2})^3 - 1)}$ z druhé rovnice. Matice druhých parciálních derivací funkce $f + \lambda g$ je pak rovna

$$\begin{pmatrix} 6\lambda a & -3\lambda \\ -3\lambda & 6\lambda b \end{pmatrix}.$$

Po dosazení spočtených hodnot λ, a a b dostáváme, že jde o negativně definitní matici a že v nalezeném bodě má f ostré lokální maximum vzhledem k množině M. (Horní levé hlavní subdeterminanty totiž jsou $6\lambda a < 0$, neboť $\lambda < 0$ a $a > 0$ a $36\lambda^2 ab - 9\lambda^2 > 0$, neboť $ab > 1$. Tvrzení tedy plyne ze Sylvestrova pravidla.) ■

§65. Lokální extrémy vzhledem k implicitně zadané množině a jemnější postačující podmínka. Silnějším nástrojem je následující postačující podmínka v situaci, kdy g, f, G, M jsou jako ve výše zformulované „větě o vázaných extrémech“, kdy hodnost matice parciálních derivací funkce g v bodě a je k a kdy v $a \in M$ existuje vektor Lagrangeových multiplikátorů λ takový, že příslušná Lagrangeova funkce $L = f + \langle \lambda, g \rangle$ má v a stacionární bod (viz [DII,Věta 217]).

Pokud je restrikce kvadratické formy druhého diferenciálu $h \mapsto d^2L(a)(h, h)$ funkce L na „množinu vektorů t kolmých k normálovým směrům k $M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ v bodě a“, tj. na množinu

$$\{t \in \mathbb{R}^n : \langle t, \nabla g_i(a) \rangle = \sum_{j=1}^{n} t_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) = 0,\ i = 1, \dots, k\},$$

pozitivně definitní, jde o ostré lokální minimum vzhledem k M. V případě, že je negativně definitní, jde o ostré lokální maximum vzhledem k M. V případě, že je indefinitní, nejde o lokální extrém vzhledem k M.

Všimněme si, že v předchozím příkladu stačilo ověřit, že kvadratická forma druhého diferenciálu v bodě $\left(\sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2\right)$ je negativně definitní, jestliže ji zúžíme na podprostor vektorů (h_1, h_2), pro které platí, že

$\frac{\partial g}{\partial x}\left(\sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2\right) h_1 + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2\right) h_2 = 0 \cdot h_1 + 3\sqrt[3]{2}\left((\sqrt[3]{2})^3 - 1\right) h_2 = 0.$

Jde tedy o vektory tvaru $(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, a stačilo nám všimnout si, že druhá parciální derivace $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$ Lagrangeovy funkce je kladná v bodě $\left(\sqrt[3]{2}, (\sqrt[3]{2})^2\right)$.

Ukážeme si, že ne vždy je možné použít obě vysvětlení jako v předchozím příkladu. Provedeme to nejprve na příkladu, který jistě vyřešíte mnohem jednodušeji, když budete postupovat s využitím parametrizace $\varphi\colon t \mapsto (t^2, t)$, ale příklad umožňuje dobře pochopit, v čem je odlišnost obou zmíněných postačujících podmínek.

P ř í k l a d Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = y^2 - 2x + x^2$ vzhledem k množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y^2\}$.

Řešení. Funkce f i funkce $g(x,y) = x - y^2$ mají spojité parciální derivace prvního i druhého řádu na $\mathbb{R}^2$. Totální diferenciál funkce g není roven nule v žádném bodě množiny $M = g^{-1}(0)$, dokonce ani v žádném bodě $\mathbb{R}^2$, neboť $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1$. Má-li f lokální extrém v bodě $(a,b) \in M$ vzhledem k M, pak musí platit nutná podmínka

$$\begin{aligned} -2 + 2a + \lambda &= 0 \\ 2b + \lambda(-2b) &= 0. \end{aligned}$$

To, že $(a,b) \in M$, dává třetí rovnici

$$a = b^2.$$

Řešením soustavy dostáváme, že nastává jedna z možností

$$\begin{aligned} (a_0, b_0) &= (0,0) \text{ a } \lambda = 2 \text{ nebo} \\ (a_1, b_1) &= \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ a } \lambda = 1 \text{ nebo} \\ (a_2, b_2) &= \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ a } \lambda = 1. \end{aligned}$$

Matice druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce

$$L(x,y) = (y^2 - 2x + x^2) + \lambda(x - y^2)$$

je v prvním případě rovna

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

To je zřejmě matice indefinitní kvadratické formy, která je např. v bodě $(1,0)$ kladná a v bodě $(0,1)$ záporná. Metoda použitá při řešení předchozího příkladu tedy nevede k řešení. Díky následně uvedené postačující podmínce pro druhý diferenciál však stačí vyšetřovat v tomto případě hodnoty této formy na vektorech kolmých k $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0), \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right) = (1,0)$, tj. na vektorech tvaru $(0, h_2)$. Protože tyto hodnoty jsou záporné pro $h_2 \neq 0$, má funkce f v počátku ostré lokální maximum vzhledem k množině M.

Ve zbylých dvou „podezřelých bodech“ postupujeme podobně. Matice druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce je v obou případech rovna

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektory kolmými k vektoru $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}), \frac{\partial g}{\partial y}(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}})\right) = (1, -\sqrt{2})$ jsou vektory $t(\sqrt{2}, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Kvadratická forma druhého diferenciálu v těchto vektorech je rovna $4t^2$, tedy je kladná pro $t \neq 0$ a funkce f má v bodě (a_1, b_1) ostré lokální minimum vzhledem k M. Protože $f(x, -y) = f(x, y)$ a $g(x, -y) = g(x, y)$, má funkce f zřejmě ostré lokální minimum i v bodě (a_2, b_2). Můžeme ovšem samozřejmě též ověřit příslušnou postačující podmínku v tomto bodě. ■

Na závěr vyřešme komplikovanější příklad z [DII, Kapitola X, §3, Cvičení 1], na kterém si ukážeme též užití postačující podmínky pro neexistenci vázaného lokálního extrému.

P ř í k l a d Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + y + z$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 1\}$.

Řešení. Funkce f a funkce $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - 1$ mají spojité parciální derivace druhého řádu na $\mathbb{R}^3$. Vektor prvních parciálních derivací funkce g v bodě (x, y, z) je roven $3(x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$. Je-li tento vektor nulový, pak $0 \leq (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(yz+xz+xy) = yz+xz+xy = -(x^2+y^2+z^2) \leq 0$. To nastane pouze pro $x = y = z = 0$. Pro tuto volbu x, y, z však neplatí, že $g(x, y, z) = 0$, a tedy pro všechny body množiny M je gradient g nenulový a je-li v bodě $(a, b, c) \in M$ lokální extrém funkce f vzhledem k M, pak musí platit

$$\begin{aligned} 1 + \lambda(3a^2 + 3bc) &= 0; \\ 1 + \lambda(3b^2 + 3ac) &= 0; \\ 1 + \lambda(3c^2 + 3ab) &= 0. \end{aligned}$$

Sečtením a-násobku první rovnice, b-násobku druhé a c-násobku třetí dostáváme, že $a + b + c + 3\lambda = 0$, použijeme-li rovnost $g(a, b, c) = 0$. Dosazením do soustavy tří rovnic za λ máme

$$\begin{aligned} 1 &= (a + b + c)(a^2 + bc); \\ 1 &= (a + b + c)(b^2 + ac); \\ 1 &= (a + b + c)(c^2 + ab). \end{aligned}$$

Z toho plyne, že nutně platí $a^2 + bc = b^2 + ac = c^2 + ab$. Tedy $(a-b)(a+b) = (a-b)c$ a $(b - c)(b + c) = (b - c)a$. Může tedy nastat, že $a = b = c$, což po dosazení do $g(a, b, c) = 0$ dává, že $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$. Pokud $a = b$ a $b + c = a$, je $c = 0$.

Po dosazení do $g(a,b,c) = 0$ máme $a = b = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Další dvě možnosti dostaneme permutacemi a, b a c, neboť rovnice se permutací a, b, c nemění. Pokud $a+b=c$ a $b+c=a$, pak $b=0$ a dostáváme jedno z řešení, která již byla popsána. Totéž platí o řešení, které dostaneme, položíme-li $a+b=c$ a $b=c$, neboť to je po záměně a a c situace, kterou jsme již řešili.

Uvažujme nyní matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce $f+\lambda g$ v bodě (a,b,c). Dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} 6\lambda a & 3\lambda c & 3\lambda b \\ 3\lambda c & 6\lambda b & 3\lambda a \\ 3\lambda b & 3\lambda a & 6\lambda c \end{pmatrix}.$$

Dopočteme-li nyní hodnotu λ z rovnice $a+b+c+3\lambda = 0$, vidíme, že ve všech nalezených „podezřelých bodech“ je hodnota λ záporná. Víc o λ nebudeme již dále potřebovat.

V případě, že $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$, dostaneme levé horní hlavní subdeterminanty po řadě typu 1×1, 2×2 a 3×3 rovny hodnotám $6a\lambda < 0$, $3(3a\lambda)^2 > 0$ a $4(3a\lambda)^3 < 0$. Jde tedy o matici negativně definitní dle Sylvestrova pravidla a funkce f má v bodě $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$ ostré lokální maximum vzhledem k množině M. (Opět bylo možné uvažovat celou kvadratickou formu; bylo ovšem také možné omezit se na její zkoumání jen na prostoru vektorů kolmých ke gradientu funkce g v bodě (a,b,c).)

Ve zbylých třech případech musí být odpověď ohledně lokálního extrému díky symetrii funkce f a funkce g vůči permutacím x, y a z stejná. Uvažujme tedy např. případ $a = b = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ a $c = 0$. Tři hlavní subdeterminanty zkoumané v předchozím případě jsou nyní $6a\lambda < 0$, $3(3a\lambda)^2 > 0$ a $-4(3a\lambda)^3 > 0$, tedy forma (matice) je indefinitní. To ovšem neříká nic o lokálním extrému funkce f v bodě (a,b,c) vzhledem k množině M! Spočtěme tedy vektor gradientu g v našem bodě (a,b,c). Je $\nabla g(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, 0) = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{2}})^2(1,1,1)$. Zajímá nás tedy kvadratická forma druhého diferenciálu Lagrangeovy funkce na vektorech (h_1,h_2,h_3), pro které platí rovnost $h_1+h_2+h_3 = 0$. Kvadratická forma $2(3a\lambda)^2(h_1^2+h_2^2+h_1h_3+h_2h_3)$ je indefinitní na prostoru $\{(h_1,h_2,h_3)\colon h_1+h_2+h_3=0\}$, neboť v bodě $(1,-1,0)$ je její hodnota kladná a v bodě $(1,1,-2)$ je záporná. Funkce f tedy nemá v těch „podezřelých bodech“, ve kterých je jedna ze souřadnic nulová, lokální extrém vzhledem k množině M.

Jediný „vázaný“ lokální extrém má tedy f v bodě $\sqrt[3]{\frac{1}{6}}(1,1,1)$ a jde o ostré lokální maximum vzhledem k M. ■

10. Hledání extrémů funkce na množině

Ukážeme si základní metody hledání největší a nejmenší hodnoty funkce více reálných proměnných na množině (a bodů, ve kterých se těchto hodnot nabývá). V případě, že funkce největší a nejmenší hodnoty nenabývá, budeme hledat supremum a infimum. Jak jsme se již zmínili, budou nás zajímat především funkce více proměnných. Přesto bude užitečné umět vyšetřovat funkce jedné proměnné, jejichž extrémy hledáme například pomocí vyšetření monotonie. Hlavní metody jsou popsány v [Z, oddíl 2.9].

Extrémům ve smyslu předchozího odstavce se často říká *globální extrémy* (někdy *absolutní extrémy*, viz [Z]), aby se odlišily od lokálních extrémů. My budeme říkat prostě extrémy, což je jednak kratší a jednak dostatečně určující.

§66. Asi nejdůležitějším prostředkem hledání extrémů je kombinace existenční věty a různých nutných podmínek pro (lokální) extrém (tzv. „**metoda podezřelých bodů**“). Základní existenční větou je věta následující.

Reálná funkce spojitá na neprázdné kompaktní množině $M \subset \mathbb{R}^n$ nabývá na M svého maxima i minima.

Nejjednodušší nutná podmínka vychází z pozorování, že nabývá-li se extrém v nějakém vnitřním bodě množiny, pak je v tomto bodě i lokální extrém, a z následující věty.

Nechť G je podmnožina $\mathbb{R}^n$ a funkce $f\colon G \to \mathbb{R}$ nechť má v bodě $a \in G^\circ$ lokální extrém. Pokud pro nějaké $i = 1, \ldots, n$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Metoda spočívá v tom, že vyloučíme body, které nesplňují námi uvažované nutné podmínky. Zbylým bodům se říká „podezřelé body“. Mezi nimi dále hledáme ty, v nichž je funkční hodnota největší nebo nejmenší. V následujícím příkladu ukážeme, jak uvedený postup použijeme s použitím uvedené nutné podmínky.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

Řešení. Funkce f je polynom v proměnných x a y, je tedy spojitá na celém $\mathbb{R}^2$. Množina M je uzavřená (lze vyjádřit např. jako průnik dvou množin, které jsou vzorem uzavřených intervalů při spojité funkci) a omezená (je totiž rovna uzavřenému čtverci o straně 2, se středem v počátku a se stranami rovnoběžnými s osami, je tedy obsažena v kruhu o poloměru $\sqrt{2}$ se středem v počátku), je tudíž kompaktní. Navíc je M zřejmě neprázdná, a tak f nabývá na M svých extrémů.

Nyní již víme, že f nabývá na M extrémů, zbývá tyto hodnoty určit. Vyloučíme tedy body, kde extrém být nemůže, pomocí uvedené nutné podmínky. Množina M však není otevřená, musíme proto rozlišit dva případy.

a) Funkce f nabývá některého extrému v nějakém bodě vnitřku M. Protože f má parciální derivace prvního řádu, musí být v tomto bodě nulové. Platí tedy

$2x+y=0$, $-6y+x=0$, což je splněno pouze pro $x=y=0$. Jediný bod vnitřku M, kde f může nabývat extrému, je tedy bod $(0,0)$, kde $f(0,0)=0$.

b) Funkce f nabývá některého extrému na hranici M. Protože M je uzavřená, je její hranice rovna $M\setminus M^\circ$, je tedy tvořena čtyřmi úsečkami. Probereme je postupně.

i) $x=1$, $y\in[-1,1]$. Na této úsečce má funkce f tvar $f(1,y)=1+y-3y^2$. Má-li f extrém v bodě $(1,y_0)$, pak funkce (jedné proměnné) $y\mapsto 1+y-3y^2$ má extrém (stejného druhu) v bodě y_0. To se může stát buď v případě, že y_0 je krajním bodem intervalu $[-1,1]$, nebo v případě, že uvedená funkce jedné proměnné má v y_0 nulovou derivaci (protože derivace existuje). První možnost dává body $(1,-1)$ a $(1,1)$, přičemž $f(1,-1)=-3$ a $f(1,1)=-1$. Druhá možnost dává rovnici $1-6y=0$, tedy bod $(1,1/6)$, přičemž $f(1,1/6)=13/12$.

ii) $x=-1$, $y\in[-1,1]$. Na této úsečce má funkce f tvar $f(-1,y)=1-y-3y^2$. Podobně jako v předchozím bodu dostáváme jednak krajní body $(-1,1)$ a $(-1,-1)$, přičemž $f(-1,1)=-3$ a $f(-1,-1)=-1$; a pak body, v nichž platí $-1-6y=0$, neboli bod $(-1,-1/6)$. V něm máme $f(-1,-1/6)=13/12$.

iii) $y=1$, $x\in(-1,1)$. Zde krajní body vyšetřovat nemusíme, neboť jsme je zahrnuli již v bodech i) a ii). Funkce f má zde tvar $f(x,1)=x^2+x-3$. Je-li v nějakém bodě extrém, platí v něm $2x+1=0$, což splňuje jen bod $(-1/2,1)$. V něm máme $f(-1/2,1)=-13/4$.

iv) $y=-1$, $x\in(-1,1)$. Funkce f má zde tvar $f(x,1)=x^2-x-3$. Je-li v nějakém bodě extrém, platí v něm $2x-1=0$, což splňuje jen bod $(1/2,-1)$. V něm máme $f(1/2,-1)=-13/4$.

Zbývá učinit závěr. Víme, že funkce f svých extrémů na M nabývá a že jich nemůže nabývat mimo nalezených devět bodů. Porovnáním hodnot ve zmíněných bodech zjistíme, že maximum je rovno $13/12$ a nabývá se ve dvou bodech $(1,1/6)$ a $(-1,-1/6)$; a minimum je $-13/4$ a nabývá se v bodech $(-1/2,1)$ a $(1/2,-1)$. ■

Poznamenejme, že při vyšetřování funkce f na hranici množiny M v předchozím příkladě jsme mohli využít symetrie této funkce, konkrétně toho, že $f(-x,-y)=f(x,y)$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Pak výsledek případu (ii) lze odvodit z případu (i) a výsledek případu (iv) lze odvodit z případu (iii).

§67. Z řešení příkladu v předchozím paragrafu je zřejmé, že potřebujeme znát nutné podmínky pro extrém na hranici množiny. Ve zmíněném příkladu bylo možné analýzu hranice jednoduše převést na analýzu funkce jedné proměnné. To je možné i v dalších případech pomocí **parametrizace hranice**, například, je-li hranicí kružnice či elipsa.

Příklad Nalezněte extrémy funkce $f(x,y)=x+y$ na množině

$$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 4x^2+y^2\le 1\}.$$

Řešení. Množina M je uzavřená (lze ji vyjádřit jako vzor uzavřeného intervalu při spojitém zobrazení) a omezená (z definující nerovnosti je zřejmé, že každý bod

$(x, y) \in M$ splňuje $|x| \leq 1/2$ a $|y| \leq 1$), je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$, a tedy nabývá na množině M svých extrémů.

Protože $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 1$ ve všech bodech $\mathbb{R}^2$, parciální derivace nejsou nikde nulové (a všude existují), a tudíž f nemá ve vnitřku M žádný lokální extrém. Proto nabývá svých extrémů na hranici.

Hranicí množiny M je množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$ (množina M je elipsa včetně svého vnitřku, hranicí je její obvod). Tu můžeme parametrizovat pomocí modifikace polárních souřadnic: $x = \frac{1}{2} \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$. Tato parametrizovaná křivka obvod elipsy proběhne nekonečněkrát, kdybychom chtěli každý bod proběhnout právě jednou, museli bychom se omezit na menší interval, například na $t \in [0, 2\pi)$. To my však nepotřebujeme. Nyní použijeme pozorování, že má-li f extrém v nějakém bodě $(x, y) = (\frac{1}{2} \cos t_0, \sin t_0)$, pak má funkce $t \mapsto f(\frac{1}{2} \cos t, \sin t) = \frac{1}{2} \cos t + \sin t$ extrém v bodě t_0. Tato funkce je diferencovatelnou funkcí jedné proměnné, a tedy v bodech extrému musí mít nulovou derivaci. Odtud dostáváme rovnici $-\frac{1}{2} \sin t + \cos t = 0$, neboli $\sin t = 2 \cos t$. Protože $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, musí platit $\sin t = 2/\sqrt{5}$ a $\cos t = 1/\sqrt{5}$ nebo $\sin t = -2/\sqrt{5}$ a $\cos t = -1/\sqrt{5}$. Mohli bychom nyní možné hodnoty t vyjádřit pomocí cyklometrických funkcí. To však není třeba, protože nás zajímají body $(\frac{1}{2} \cos t, \sin t)$ a nikoli hodnota t. Dostáváme tedy dva body $(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ a $(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$.

Je $f(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ a $f(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, v prvním z bodů je tedy maximum a ve druhém minimum. ∎

Podobně můžeme postupovat vždy, když hranici umíme vhodně parametrizovat – ať již celou nebo po částech. Pro kružnici můžeme použít polární souřadnice, pro povrch koule v $\mathbb{R}^3$ sférické souřadnice atp.

§68. Další metodou užitečnou při vyšetřování funkcí na některých množinách bez vnitřních bodů (např. na hranicích některých množin) je **metoda Lagrangeových multiplikátorů**. Je založena na použití Věty 217 v [D2, kapitola X, §3], konkrétně její první části, která obsahuje nutnou podmínku pro lokální extrém funkce na množině určené několika rovnostmi. Znění této věty je připomenuto v §64. Níže uvedené odkazy používají tam uvedené značení.

Příklad Najděte extrémy funkce $f(x, y, z) = x$ na množině

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^3 + y^3 + z^3 = 0\}.$$

Řešení. Množina M je zřejmě uzavřená, omezená a neprázdná, funkce f spojitá dokonce na celém $\mathbb{R}^3$, a tedy f na M svých extrémů nabývá.

Při jejich hledání využijeme větu o Lagrangeových multiplikátorech. Aby ji bylo možno použít, rozdělíme si množinu M na dvě části

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$$

a

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^3 + y^3 + z^3 = 0\}$$

a vyšetříme chování f zvlášť na M_1 a na M_2.

(i) Najděme „podezřelé body“ v množině M_1. Použijeme větu o Lagrangeových multiplikátorech (pro $n = 3$, $k = 1$, $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$, $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$). Uvědomte si, že jsou splněny její předpoklady (totiž, že funkce f a g jsou třídy C^1 na G).

Je-li v bodě $(x, y, z) \in M_1$ lokální extrém vzhledem k M_1, pak buď platí rovnost $\nabla g(x, y, z) = 0$ nebo existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že $\nabla f(x, y, z) + \lambda \nabla g(x, y, z) = 0$.

V prvním případě dostáváme $3x^2 = 3y^2 = 3z^2 = 0$, tedy bod $(0, 0, 0)$. Tento bod leží v M_1 a platí $f(0, 0, 0) = 0$.

V druhém případě dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \cdot 3x^2 &= 0, \\ \lambda \cdot 3y^2 &= 0, \\ \lambda \cdot 3z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice vidíme, že $\lambda \neq 0$. Proto z druhé a třetí plyne $y = z = 0$. Má-li být $(x, y, z) \in M_1$, musí být i $x = 0$. Pak ovšem není splněna první rovnice. Tento případ tedy nemůže nastat.

(ii) Najdeme podezřelé body v množině M_2. Použijeme větu o Lagrangeových multiplikátorech (pro $n = 3$, $k = 2$, $G = \mathbb{R}^3$, $g = (g_1, g_2)$, kde používáme značení $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a $g_2(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$). Opět si uvědomte, že jsou splněny její předpoklady.

Je-li v některém bodě množiny M_2 lokální extrém vzhledem k M_2, pak buď jsou vektory $\nabla g_1(x, y, z)$ a $\nabla g_2(x, y, z)$ lineárně závislé, nebo existují $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, že $\nabla f(x, y, z) + \lambda \nabla g_1(x, y, z) + \mu \nabla g_2(x, y, z) = 0$.

V prvním případě jsou vektory (x, y, z) a (x^2, y^2, z^2) lineárně závislé, tj. jeden je násobkem druhého. To se stane jen v případě, že všechny nenulové souřadnice vektoru (x, y, z) jsou si rovny. Žádný takový bod však v množině M_2 neleží.

V druhém případě dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 1 + \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 3x^2 &= 0, \\ \lambda \cdot 2y + \mu \cdot 3y^2 &= 0, \\ \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 3z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice dostáváme, že $y = 0$ nebo $2\lambda + 3\mu y = 0$, z třetí rovnice plyne, že $z = 0$ nebo $2\lambda + 3\mu z = 0$.

Body, pro které platí $y = 0$ jsou v množině M_2 dva: $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ a $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$. Body splňující $z = 0$ jsou rovněž dva – $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ a $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

Další možností je, že $2\lambda + 3\mu y = 0$ a $2\lambda + 3\mu z = 0$. Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme $3\mu(y - z) = 0$. Kdyby $\mu = 0$, pak z uvedených dvou rovnic plyne $\lambda = 0$, což je ovšem ve sporu s první rovnicí z výše uvedené soustavy. Proto $\mu \neq 0$, a tedy $y = z$. Protože $(x, y, z) \in M_2$, dostáváme $x^2 + 2y^2 = 1$ a $x^3 + 2y^3 = 0$. To splňují jedině body $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}\right)$ a $\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}\right)$.

Nalezli jsme tedy sedm podezřelých bodů, mezi nimiž jsou body, v nichž se nabývá extrémů. Funkční hodnoty v nich jsou 0, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\pm\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}}$. Snadno zjistíme, že $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2+\sqrt[3]{4}}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, a tudíž maximum je $1/\sqrt{2}$ (nabývá se v bodech $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ a $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$) a minimum je $-1/\sqrt{2}$ (nabývá se v bodech $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ a $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$). ■

Všimněte si, že jsme uvedené soustavy rovnic neřešili „až do konce“. Naším cílem nebylo totiž najít právě všechna řešení (což je potřebné při vyšetřování lokálních extrémů), ale jen co nejjednodušeji najít co nejmenší množinu obsahující všechna řešení. Nevadilo by nám, kdyby obsahovala několik málo bodů navíc.

§69. V případě, že nás zajímají extrémy spojité funkce na nekompaktní množině, lze někdy množinu redukovat na kompaktní pomocí vyšetření „limitního chování v nekonečnu“.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2}$ na $\mathbb{R}^2$.

Řešení. Zatímco funkce f je zřejmě spojitá, množina $\mathbb{R}^2$ není kompaktní. Nicméně tvar funkce f umožňuje provést některé úvahy. Jednak je funkce f zřejmě nezáporná a nulové hodnoty nabývá jen v počátku. Proto má minimum 0. Dále můžeme usoudit, že pro body „hodně vzdálené“ od počátku budou funkční hodnoty „hodně malé“, protože „exponenciála převáží polynom“. Tyto úvahy lze zformulovat přesně. Využijme faktu, že $\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$ (což ověříme například l’Hospitalovým pravidlem).

Je totiž $f(x, y) \leq 7(5x^2 + 2y^2)e^{-(5x^2+2y^2)}$ na celém $\mathbb{R}^2$. Protože $\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$, existuje $R > 0$ takové, že pro $t \geq R$ platí $te^{-t} < \frac{1}{14}f(1, 1)$. Uvažme množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 5x^2 + 2y^2 \leq R\}$. Tato množina je uzavřená a omezená (jde o nějakou elipsu se středem v počátku), je tedy kompaktní. Funkce f na M tudíž nabývá svého maxima v nějakém bodě (x_0, y_0). Pokud je bod (x, y) mimo M, je $f(x, y) < \frac{1}{2}f(1, 1)$ (to plyne z volby R). Proto bod $(1, 1)$ patří do množiny M, a tedy $f(x_0, y_0) \geq f(1, 1)$. Tudíž pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ platí $f(x_0, y_0) > f(x, y)$. Proto funkce f má v bodě (x_0, y_0) maximum na $\mathbb{R}^2$.

Tím jsme ukázali, že f nabývá svého maxima na $\mathbb{R}^2$. Protože množina $\mathbb{R}^2$ je otevřená, stačí najít body, v nichž má f nulové parciální derivace prvního řádu a z nich vybrat ten, v němž je největší funkční hodnota.

Jest $\frac{\partial f}{\partial x} = (2x - 10x(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2-2y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = (14y - 4y(x^2 + 7y^2))e^{-5x^2-2y^2}$. Obě jsou nulové, právě když $2x - 10x(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14y - 4y(x^2 + 7y^2) = 0$. Jsou čtyři možnosti:

(i) $x = 0$ a $y = 0$ – tím dostaneme již známý bod minima $(0, 0)$.

(ii) $x = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – odtud dostaneme dva body $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. V obou je hodnota f rovna $\frac{7}{2e}$.

(iii) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $y = 0$ – odtud dostaneme dva body $(1/\sqrt{5}, 0)$ a $(-1/\sqrt{5}, 0)$. V obou je hodnota f rovna $\frac{1}{5e}$.

(iv) $2 - 10(x^2 + 7y^2) = 0$ a $14 - 4(x^2 + 7y^2) = 0$ – tento případ však nemůže nastat, protože výraz $x^2 + 7y^2$ nemůže být zároveň $1/5$ i $7/2$.

Nyní porovnáním výsledků dostaneme, že funkce f nabývá maxima $\frac{7}{2e}$ v bodech $(0, 1/\sqrt{2})$ a $(0, -1/\sqrt{2})$. ■

§70. Pokud funkce extrémů nenabývá, nebo alespoň nevíme předem, zda nabývá, hledáme supremum a infimum. Přitom nám někdy může pomoci následující pozorování.

Nechť funkce f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ *a* $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Toto se hodí například v případě, že množina M je omezená. Pak totiž její uzávěr je kompaktní, a je-li f na $\overline{M}$ spojitá, pak můžeme na $\overline{M}$ najít extrémy, a tím určíme supremum a infimum na M.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte supremum a infimum funkce $f(x, y) = \sin x + \sin y$ na množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < \pi^2/4\}$. Existuje minimum a maximum funkce f na M?

Řešení. Množina M je otevřená a f má všude na M parciální derivace. Pokud tedy má f extrém v nějakém bodě M, musí v něm být parciální derivace prvního řádu nulové, tj. $\cos x = 0$ a $\cos y = 0$. To splňují body tvaru $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + l\pi)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Žádný z těchto bodů ovšem v M neleží. Proto f na M extrémů nenabývá.

Nicméně funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a $\overline{M}$ je kompaktní (M je otevřený kruh o středu 0 a poloměru $\pi/2$, $\overline{M}$ je příslušný uzavřený kruh). Proto f nabývá extrémů na $\overline{M}$. Protože v M extrémy nemá, nabývá jich na hranici, tj. na množině $\partial M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = \pi^2/4\}$. (Jelikož M je otevřená, je $\partial M = \overline{M} \setminus M$.) To je kružnice, a tedy bychom ji mohli parametrizovat jako v §67. Tento postup necháváme na čtenáři, zde použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů z §68.

Funkce $g(x, y) = x^2 + y^2 - \pi^2/4$ je třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, její parciální derivace jsou $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Obě jsou nulové pouze v bodě $(0, 0)$, který neleží v ∂M. Proto, má-li funkce f v nějakém bodě ∂M lokální extrém (vzhledem k ∂M), existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které platí:

$$\begin{aligned} \cos x + \lambda \cdot 2x &= 0, \\ \cos y + \lambda \cdot 2y &= 0, \\ x^2 + y^2 - \pi^2/4 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic dostáváme, že $y \cos x - x \cos y = 0$. Všimněme si, že nemůže být $x = 0$ ani $y = 0$. Jinak by totiž nebyla splněna první nebo druhá rovnice. Proto rovnici můžeme upravit na tvar $\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}$. Přitom $(\frac{\cos t}{t})' = \frac{-(\sin t)\cdot t - \cos t}{t^2}$. Proto je funkce $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ klesající na $(0, \pi/2]$ i na $[-\pi/2, 0)$. Protože navíc pro $t \in (0, \pi/2]$ je $\frac{\cos t}{t} > 0$ a pro $x \in [-\pi/2, 0)$ je $\frac{\cos t}{t} < 0$, je tato funkce prostá na $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$. Jelikož $(x, y) \in \partial M$ implikuje $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$, z rovnosti $\frac{\cos x}{x} = \frac{\cos y}{y}$ plyne $x = y$. Takové body jsou v ∂M dva: $(\pi/\sqrt{8}, \pi/\sqrt{8})$ a $(-\pi/\sqrt{8}, -\pi/\sqrt{8})$. V prvním z nich nabývá f na $\overline{M}$ maxima, ve druhém minima.

Proto, podle tvrzení na počátku paragrafu, je $\sup f(M) = 2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}$ a $\inf f(M) = -2 \sin \frac{\pi}{\sqrt{8}}$. ■

<u>P ř í k l a d</u> Najděte $f(M)$, je-li $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y > 0\}$ a $f(x, y) = (7x + 10y)e^{-x-y}$.

Řešení. Protože funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a množina M je konvexní, a tedy souvislá, je $f(M)$ souvislá podmnožina $\mathbb{R}$. Proto je $f(M)$ interval. Stačí tudíž určit supremum a infimum funkce f na M a zjistit, zda f těchto hodnot nabývá.

Množina M je otevřená a f má všude parciální derivace. Má-li tedy f v nějakém bodě M extrém, má tam parciální derivace nulové. Necháváme čtenáři ověřit, že takový bod neexistuje. Proto f nenabývá extrémů (a tedy $f(M)$ je otevřený interval).

Podle tvrzení na počátku paragrafu je $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$. Přitom $\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0\}$.

Postupujme podobně jako v příkladu v §69. Je $f(0, 0) = 0$ a $f \geq 0$ na $\overline{M}$. Tudíž $\inf f(M) = 0$.

Abychom nalezli supremum f na M, uvědomme si nejprve, že f nabývá na $\overline{M}$ maxima. Pro $(x, y) \in \overline{M}$ platí totiž $f(x, y) \leq 10(x + y)e^{-x-y}$. Protože platí $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$, existuje $T > 0$ takové, že pro $t \geq T$ je $te^{-t} < \frac{1}{10} f(1, 1)$. Pak funkce f nabývá maxima na množině $M_1 = \{(x, y) \in \overline{M} \colon x + y \leq T\}$ (tato množina je kompaktní – jde o uzavřený trojúhelník) a toto maximum je zároveň maximem na $\overline{M}$, protože pro $(x, y) \in \overline{M} \setminus M_1$ je $f(x, y) < f(1, 1)$.

Protože f na M extrémy nemá, musí bod maxima ležet na hranici. Ta se skládá z bodu $(0, 0)$ (kde je minimum) a ze dvou polopřímek $H_1 = \{(x, 0) \colon x > 0\}$ a $H_2 = \{(O, y) \colon y > 0\}$.

Má-li f maximum v nějakém bodě H_1, pak má v tomto bodě maximum i vzhledem k H_1. Na H_1 má f tvar $f(x, 0) = 7xe^{-x}$. Můžeme ji tedy vyšetřovat jako funkci jedné proměnné. Derivace je rovna $7(1 - y)e^{-x}$, je nulová právě pro $x = 1$. Přitom $f(1, 0) = 7/e$.

Podobně na H_2 má f tvar $f(0, y) = 10ye^{-y}$. Derivace této funkce proměnné y je $10(1 - y)e^{-y}$, a to je rovno 0 právě pro $y = 1$. Přitom $f(0, 1) = 10/e$.

Z právě provedených výpočtů a výše uvedeného zdůvodnění plyne, že funkce f nabývá na $\overline{M}$ maxima $10/e$ v bodě $(0, 1)$. Proto $\sup f(M) = 10/e$, a máme tedy

$f(M) = (0, 10/e)$. ■

§71. Ukážeme si ještě jednu možnost hledání suprema či infima funkce na nekompaktní množině. Spočívá zhruba řečeno v pokrytí definičního oboru kompaktními množinami (v následujícím příkladu K_c), vyšetření extrémů na nich ($m(c) = \max\{f(x) : x \in K_c\}$) a ve vyšetřování jednodušší funkce (v našem případě funkce $m(c)$ jedné proměnné).

P ř í k l a d Najděte nejmenší reálné číslo L, pro které platí nerovnost

$$(2x^3 + y^3 + x^2y + 2xy^2 + x)\sqrt{x^2+y^2} \le L(x^2+y^2+1)^2$$

pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Řešení. Prvně si uvědomme, že hledané L je rovno supremu množiny hodnot funkce

$$F(x, y) = \frac{(2x^3 + y^3 + x^2y + 2xy^2 + x)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Budeme proto hledat toto supremum a pokud je reálné, je to hledané L, pokud není reálné, pak hledané L neexistuje. Všimneme si, že F je spojitá na $\mathbb{R}^2$, jak vyšetřovat její „limitní chování v nekonečnu“ je však nejasné. Rozdělíme nyní definiční obor F, tj. celé $\mathbb{R}^2$, na kompaktní množiny

$$K_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\} \text{ pro } c \ge 0.$$

Jde o pokrytí, neboť $x^2 + y^2 \ge 0$ pro všechna $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. (Jde dokonce o dělení, neboť zřejmě $K_c \cap K_d = \emptyset$ pro $c \neq d$.) Každá z množin K_c je omezená (norma všech jejích prvků je $\sqrt{c}$) a uzavřená (je vzorem uzavřené množiny $\{c\}$ při spojité funkci $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$). Je tedy kompaktní. Budeme nyní hledat

$$m(c) = \max\{F(x, y) : (x, y) \in K_c\}.$$

Abychom si situaci zjednodušili, všimneme si prvně, že k tomu stačí najít

$$\max\{f(x, y) : (x, y) \in K_c\},\ c \ge 0,$$

kde $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + x^2y + 2xy^2 + x$, protože

$$m(c) = \frac{\sqrt{c}}{(c+1)^2} \max\{f(x, y) : (x, y) \in K_c\}.$$

Jde tedy o úlohu hledání maxima funkce f za podmínky, že funkce $g(x, y) = x^2 + y^2$ je rovna c. Obě funkce mají spojité parciální derivace,

$$\nabla f(x, y) = (6x^2 + 2xy + 2y^2 + 1, 3y^2 + x^2 + 4xy) \quad \text{a} \quad \nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

na $\mathbb{R}^2$. Gradient funkce g je tedy nenulový vektor na celém K_c, pokud $c \neq 0$. Protože $m(0) = 0$, omezíme se na $c > 0$, pro která můžeme použít tvrzení o Lagrangeových multiplikátorech (o vázaných extrémech) z §64.

Nechť $c > 0$ je pevně zvolené. Nutnou podmínkou pro to, aby f nabývala v bodě $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ maximum vzhledem k množině K_c, je platnost rovností

$$6x^2 + 2xy + 2y^2 + 1 = \lambda \cdot 2x, \tag{1}$$

$$3y^2 + x^2 + 4xy = \lambda \cdot 2y, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = c. \tag{3}$$

Vynásobíme-li první rovnost y a odečteme od ní druhou rovnost vynásobenou x, pak dostaneme

$$2x^2y - xy^2 + 2y^3 + y - x^3 = 0.$$

Zkusme dosadit za x^2 výraz $c - y^2$. Dostaneme (po jednoduché úpravě) rovnost

$$y = \frac{cx}{2c+1}. \tag{4}$$

Dosazením do (3) za y dostáváme řešení

$$x_c^+ = \frac{(2c+1)\sqrt{c}}{\sqrt{5c^2 + 4c + 1}}$$

a zároveň (např. z (4))

$$y_c^+ = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{5c^2 + 4c + 1}},$$

nebo

$$x_c^- = -\frac{(2c+1)\sqrt{c}}{\sqrt{5c^2 + 4c + 1}}$$

a

$$y_c^- = -\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{5c^2 + 4c + 1}}.$$

Protože v prvním případě dostaneme $f(x_c^+, y_c^+) > 0$ a ve druhém případě je $f(x_c^-, y_c^-)(= -f(x_c^+, y_c^+)) < 0$, nabývá f své maximum na K_c v bodě (x_c^+, y_c^+), protože je to spojitá funkce na kompaktní množině K_c a bod (x_c^+, y_c^+) je jediným kandidátem podle věty o vázaných extrémech. Po dosazení do definice funkce f a elementárním leč nepříjemném počítání dostaneme

$$f(x_c^+, y_c^+) = \max f(K_c) = \sqrt{c(5c^2 + 4c + 1)}.$$

Konečně

$$m(c) = \frac{\sqrt{c}}{(c+1)^2} \max f(K_c) = \frac{c}{(c+1)^2}\sqrt{5c^2+4c+1}.$$

Tento vzorec souhlasí i s tím, že $m(0) = 0$ a definuje spojitou funkci na intervalu $[0, \infty)$. Dalším elementárním počítáním dostaneme, že

$$m'(c) = \frac{8c^2+5c+1}{(c+1)^3\sqrt{5c^2+4c+1}},$$

což je zřejmě kladné číslo pro všechna $c > 0$. Dostáváme, že m je rostoucí funkce na intervalu $[0, \infty)$. Protože $\lim\limits_{c\to\infty} m(c) = \sqrt{5}$, je i $\sup\{m(c) : c \in [0, \infty)\} = \sqrt{5}$.

Nejmenší reálné L, které splňuje zadanou nerovnost tedy skutečně existuje a je rovno $\sqrt{5}$. ■

§72. Při vyšetřování **extrémů konvexních nebo konkávních funkcí** může být užitečné tvrzení z §62.

<u>Příklad</u> Najděte extrémy funkce $f(x, y) = e^{x^2+y} + e^{-x-y}$ na $\mathbb{R}^2$, pokud existují.

Řešení. Funkce f má parciální derivace všude na $\mathbb{R}^2$, proto v bodech extrémů musí být parciální derivace nulové. Je $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{x^2+y} - e^{-x-y}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x^2+y} - e^{-x-y}$. Odečtením rovnic $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ dostaneme $x = 1/2$, z první rovnice pak $y = -3/8$.

Protože zřejmě $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, 0) = +\infty$, není f shora omezená. Matice druhých parciálních derivací má tvar $\begin{pmatrix} 2e^{x^2+y} + 4x^2e^{x^2+y} + e^{-x-y} & 2xe^{x^2+y} + e^{-x-y} \\ 2xe^{x^2+y} + e^{-x-y} & e^{x^2+y} + e^{-x-y} \end{pmatrix}$. Její determinant je (po úpravě) $2e^{2x^2+2y} + (4x^2 - 4x + 3)e^{x^2-x}$. Tento výraz je vždy kladný (protože exponenciální funkce nabývá jen kladných hodnot a kvadratický trojčlen $4x^2 - 4x + 3$ rovněž). Protože i levý horní prvek matice je kladný, je matice pozitivně definitní, a tedy je funkce f ryze konvexní na $\mathbb{R}^2$ (viz §57). Proto dle věty z §62 je v nalezeném bodě minimum f na $\mathbb{R}^2$. ■

Poznamenejme, že jsme se mohli přesvědčit o konvexitě funkce f z předchozího příkladu bez použití matice druhých parciálních derivací. Stačí si uvědomit, že funkce x^2, x, $-x$, $-y$ jsou konvexní, funkce e^x je konvexní a rostoucí, že součet dvou konvexních funkcí je konvexní a $f \circ g$ je konvexní, je-li g konvexní a f neklesající konvexní funkce.

11. Derivování složených funkcí

V tomto oddíle si ukážeme základní metody použití věty o derivaci složené funkce více proměnných. Začněme tím, že připomeneme znění této věty (viz [D2, Věta 189]).

Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce s proměnných, které mají v bodě $a \in \mathbb{R}^s$ totální diferenciál. Položme $b = (\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a))$. Je-li f funkce r proměnných, která má totální diferenciál v bodě b, potom funkce (s proměnných) definovaná předpisem $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$ má totální diferenciál v bodě a a pro $j = 1, \dots, s$ platí $\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a)$.

§73. Nejjednodušším použitím je **přímá aplikace** na výpočet parciálních derivací složené funkce (případně též derivací ve směru či totálního diferenciálu).

<u>Příklad</u> Nechť funkce f má vlastní derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$. Položme $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vyjádřete parciální derivace prvního řádu funkce g pomocí derivace funkce f.

Řešení. Protože f má vlastní derivaci, má i totální diferenciál v každém bodě $\mathbb{R}$. Navíc funkce x^2+y^2 má zřejmě spojité parciální derivace prvního řádu (uvědomte si, že funkce $(x, y) \mapsto 2x$ a $(x, y) \mapsto 2y$ jsou spojité na $\mathbb{R}^2$), a tedy má totální diferenciál v každém bodě (viz §54). Proto má g totální diferenciál a platí $\frac{\partial g}{\partial x} = f'(x^2+y^2) \cdot 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = f'(x^2 + y^2) \cdot 2y$ na celém $\mathbb{R}^2$. ■

<u>Příklad</u> Nechť funkce $f = f(u, v)$ je třídy C^2 na okolí bodu $(a+b, a-b)$. Položme $g(x, y) = f(x + y, x - y)$. Vyjádřete $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a, b)$ pomocí derivací funkce f.

Řešení. Funkce $x + y$ i $x - y$ jsou třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, mají tedy totální diferenciál v každém bodě. Funkce f má totální diferenciál na okolí bodu $(a + b, a - b)$, platí tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, x - y) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, x - y) \cdot 1 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(x + y, x - y) + \frac{\partial f}{\partial v}(x + y, x - y)\end{aligned}$$

na okolí bodu (a, b). Dále funkce $\frac{\partial f}{\partial u}$ a $\frac{\partial f}{\partial v}$ mají totální diferenciál v bodě $(a+b, a-b)$ (protože mají spojité parciální derivace prvního řádu na okolí tohoto bodu), a tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a+b,a-b)+ \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a+b,a-b) = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(a+b,a-b) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(a+b,a-b).\end{aligned}$$

■

<u>P ř í k l a d</u> Nechť $f = f(t,u)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ a splňuje $f(1,1) = 1$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial t}(1,1)$ pomocí derivací funkce f, je-li

$$g(t,u) = f(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}).$$

Řešení. Funkce $(t,u) \mapsto f(t,u)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ podle zadání, funkce $(t,u) \mapsto f(u,t)$ má totální diferenciál v bodě $(1,1)$ podle výše uvedené věty (aplikované pro $\varphi_1(t,u) = u$ a $\varphi_2(t,u) = t$). Tedy i funkce $f(t,u)^{f(u,t)}$ a $f(u,t)^{f(t,u)}$ mají totální diferenciál v bodě $(1,1)$ (užíváme definici obecné mocniny, podle níž $f(t,u)^{f(u,t)} = \exp(f(u,t) \log f(t,u))$ a podobně v druhém případě). Protože navíc $f(1,1)^{f(1,1)} = 1$, má podle výše uvedené věty totální diferenciál v bodě $(1,1)$ i funkce g. Navíc platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t}(1,1) = \Bigg(\frac{\partial f}{\partial t}(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}) \cdot f(t,u)^{f(u,t)} \cdot \\ \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial u}(u,t) \log f(t,u) + \frac{f(u,t)}{f(t,u)} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\Big) + \\ + \frac{\partial f}{\partial u}(f(t,u)^{f(u,t)}, f(u,t)^{f(t,u)}) \cdot \\ \cdot f(u,t)^{f(t,u)} \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(t,u) \log f(u,t) + \frac{f(t,u)}{f(u,t)} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(u,t)\Big)\Bigg)_{\substack{t=1\\u=1}} \\ = \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(1,1)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}(1,1)\Big)^2.\end{aligned}$$

Značení použité v tomto výpočtu může být poněkud matoucí. Uvádíme ho proto, že se s takovým značením čtenář může setkat i jinde, a je tedy užitečné mu rozumět. Nejasnosti mohou vzniknout z toho, že písmena t, u se používají ve dvou různých významech. Jednak označují první a druhou proměnnou funkce f (a také g), tedy $\frac{\partial f}{\partial t}$ znamená derivace funkce f podle první proměnné, $\frac{\partial f}{\partial u}$ derivaci funkce f podle druhé proměnné. A potom označují čísla, která do výrazu dosazujeme. Takže $\frac{\partial f}{\partial u}(u,t)$ označuje derivaci funkce f podle druhé proměnné v bodě (u,t) (čili $\partial_2 f(u,t)$), nikoli derivaci výrazu $f(u,t)$ podle u (tu bychom značili $\frac{\partial}{\partial u}(f(u,t))$ a podle věty z počátku tohoto oddílu by se rovnala $\frac{\partial f}{\partial t}(u,t) = \partial_1 f(u,t)$). Pro lepší ozřejmení výpočtu ho uvedeme ještě jednou s jiným značením. Pišme $g(x,y) = f(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)})$ a počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \Bigg(& \frac{\partial f}{\partial t}(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)}) \cdot f(x,y)^{f(y,x)} \cdot \\
& \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial u}(y,x) \log f(x,y) + \frac{f(y,x)}{f(x,y)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,y)\Big) + \\
+ & \frac{\partial f}{\partial u}(f(x,y)^{f(y,x)}, f(y,x)^{f(x,y)}) \cdot \\
& \cdot f(y,x)^{f(x,y)} \cdot \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(x,y) \log f(y,x) + \frac{f(x,y)}{f(y,x)} \frac{\partial f}{\partial u}(y,x)\Big)\Bigg)_{\substack{x=1\\y=1}} \\
= & \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(1,1)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}(1,1)\Big)^2.
\end{aligned}$$

■

§74. Další možností je tzv. **nepřímá aplikace**. Spočívá v tom, že známé hodnoty vyjádříme pomocí neznámých, a tyto neznámé pak vypočítáme jako řešení vzniklé rovnice případně soustavy rovnic.

P ř í k l a d   Nechť $u = u(x,y)$ je funkce třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$ splňující $u(x,x^2) = 1$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2)$.

Řešení. Opět si uvědomme, že $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)$ znamená parciální derivaci funkce u podle první proměnné v bodě (x,x^2), tudíž uvedená rovnost znamená totéž, jako $\frac{\partial u}{\partial x}(a,a^2) = a$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Protože funkce $(x,y) \mapsto x$ i $(x,y) \mapsto x^2$ mají všude totální diferenciál, lze derivaci funkce $\varphi(x) = u(x,x^2)$ počítat podle výše uvedené věty, tedy $\varphi'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) \cdot 2x$. Zároveň však víme, že funkce φ je konstantně rovna jedné, a tedy $\varphi'(x) = 0$. Platí tedy $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) \cdot 2x = 0$. Po dosazení za $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2)$ dostáváme $\frac{\partial u}{\partial y}(x,x^2) = -1/2$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Protože však u je třídy C^1, je $\frac{\partial u}{\partial y}$ spojitá, a tedy i $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -1/2$. ■

P ř í k l a d   Nechť funkce f má totální diferenciál v bodě $(1,0)$, funkce g je definována předpisem $g(u,v) = f(e^u \cos v, e^u \sin v)$ a $\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 7$, $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = -1$. Spočtěte parciální derivace funkce f v bodě $(1,0)$.

Řešení. Podle věty z počátku oddílu (aplikované pro bod $a = (0,0)$ a zobrazení $\varphi(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$) platí
$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = (\partial_1 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \cos v + \partial_2 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \sin v)_{u=v=0}$ a
$\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = (\partial_1 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot (-e^u \sin v) + \partial_2 f(e^u \cos v, e^u \sin v) \cdot e^u \cos v)_{u=v=0}$.

Po dosazení dostáváme $7 = \partial_1 f(1,0)$ a $-1 = \partial_2 f(1,0)$. ■

§75. Další aplikací věty o derivaci složené funkce je tzv. **změna souřadnic**, tedy vyjádření derivací dané funkce v nových souřadnicích. Toho lze využít například pro řešení diferenciálních rovnic. Vysvětleme si nejprve, co tato změna znamená (viz též [D2, Kapitola 9, §1]).

Mějme nějakou funkci n proměnných, řekněme $f = f(x_1, \dots, x_n)$. Dále mějme zobrazení $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ definované na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^n$ s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ a definujme funkci $\tilde{f}(y) = f(\varphi(y))$. Cílem je vyjádřit parciální derivace funkce f v bodě $\varphi(y)$ pomocí parciálních derivací funkce $\tilde{f}$ v bodě y. To ovšem bude možné jen za určitých předpokladů, které shrneme v následující větě.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^n$, funkce f buď třídy C^1 na okolí bodu b, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nechť jsou třídy C^1 na okolí a, přičemž $\varphi(a) = b$. Dále nechť Jacobiho matice (tj. matice parciálních derivací prvního řádu) zobrazení φ v bodě a je regulární. Pak lze na nějakém okolí bodu a jednoznačně vyjádřit parciální derivace funkce f v bodě $\varphi(y)$ pomocí parciálních derivací funkce $\tilde{f}$ v bodě y.

Postupujeme tak, že s využitím věty z počátku tohoto oddílu, vyjádříme derivace funkce $\tilde{f}$ v bodě y pomocí derivací funkce f v bodě $\varphi(y)$. Tím dostaneme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(y)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(y))$. Díky předpokladu, že matice soustavy je regulární, můžeme tyto neznámé jednoznačně vyjádřit.

Uvedené podmínky umožňují parciální derivace vyjádřit lokálně, tj. v nějakém okolí zadaného bodu. Někdy lze použít globální verzi. Totiž tehdy, je-li f třídy C^1 na otevřené množině G, zobrazení φ prostě zobrazuje otevřenou množinu H na množinu G a v každém bodě H má regulární Jacobiho matici.

Příklad Najděte všechna řešení třídy C^1 parciální diferenciální rovnice $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy$ na polorovině $\{(x,y)\colon x > 0\}$ pomocí substituce $x = u$, $y = uv$.

Řešení. Nejprve si uvědomme, na jaké množině se naše změna souřadnic odehrává. Je-li totiž $G = \{(x,y)\colon x > 0\}$ a $\varphi(u,v) = (u, uv)$, pak Jacobiho matice zobrazení φ je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$, a ta je regulární pro $u \neq 0$. Navíc snadno ověříme, že zobrazení φ prostě zobrazuje množinu $H = \{(u,v)\colon u > 0\}$ na G. Bude proto stačit, omezíme-li se na φ zúžené na H.

Je-li nyní f funkce třídy C^1 na G, pak definujme funkci $\tilde{f}$ předpisem $\tilde{f}(u,v) = f(u,uv)$. Funkce $\tilde{f}$ je třídy C^1 na H a pro $(u,v) \in H$ platí:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv) \text{ a } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v) = u\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv).$$

Odtud můžeme vyjádřit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,uv) = \frac{1}{u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u,v)$$

a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(u, uv) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u, v) - \frac{v}{u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u, v).$$
Dále, funkce f splňuje na G rovnici ze zadání, právě když $\tilde{f}$ splňuje na H rovnici:
$$u\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - \frac{v}{u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\right) + uv \cdot \frac{1}{u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = u \cdot uv,$$
neboli $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = uv$. Řešení této rovnice mají zřejmě tvar $\tilde{f}(u, v) = \frac{1}{2}u^2 v + h(v)$, kde h je libovolná funkce jedné proměnné třídy C^1.

Nyní si zbývá uvědomit, že složíme-li funkci $\tilde{f}$ s inverzním zobrazením k φ (tj. dosadíme $u = x$, $v = y/x$, dostaneme řešení původní rovnice. Řešeními třídy C^1 jsou tudíž funkce tvaru $f(x, y) = \frac{1}{2}xy + h(y/x)$, kde h je libovolná funkce jedné proměnné třídy C^1. ∎

<u>P ř í k l a d</u> Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ třídy C^2, které splňují diferenciální rovnici
$$y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$
Použijte převod do polárních souřadnic.

Řešení. Připomeňme, že polární souřadnice se zavádí rovnostmi $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Zobrazení $\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ je třídy C^∞ na množině $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ a zobrazuje ji na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

V následujícím postupu nebudeme explicitně používat více. Často se ale při používání polárních souřadnic hodí to, že jakobián Φ v bodě (r, φ) je roven r, a tedy je nenulový. Proto je Φ lokální difeomorfismus (tj. Φ je difeomorfismus na nějakém okolí každého bodu).

Nechť $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je libovolná funkce třídy C^1. Uvažujme funkci
$$\tilde{g}(r, \varphi) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$
Máme
$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \varphi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi,\\ \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)(-r\sin\varphi) + \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\cos\varphi.\end{aligned}$$
Odtud vyjádříme první parciální derivace
$$(*)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \varphi)\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\sin\varphi,\\ \frac{\partial g}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial r}(r, \varphi)\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \varphi}(r, \varphi)\cos\varphi.\end{aligned}$$

Potřebujeme vyjádřit parciální derivace f pomocí parciálních derivací $\tilde{f}$. To docílíme aplikací (*) na $g = f$, $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ a $g = \frac{\partial f}{\partial y}$. (Tento postup stojí za zapamatování. Další derivování rovností pro první parciální derivace $\tilde{f}$ je též možné, ale vyžaduje v dalším řešení soustavy lineárních rovnic pro druhé parciální derivace.) Proveďme zmíněné dosazení pro výpočet $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ podrobněji. Dosadíme tedy např. vztah pro $\frac{\partial f}{\partial x}$ za g do rovnosti pro $\frac{\partial g}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}}(r,\varphi)\right)\sin\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}}(r,\varphi)\right)\cos\varphi = \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\varphi)\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\sin\varphi\right)}{\partial r}\sin\varphi + \\
&\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\varphi)\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\sin\varphi\right)}{\partial \varphi}\cos\varphi \\
&= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\varphi)\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\sin^2\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi \partial r}(r,\varphi)\sin^2\varphi + \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \varphi}(r,\varphi)\cos^2\varphi - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\cos^2\varphi\right) = \\
&= \frac{\sin 2\varphi}{2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{\cos 2\varphi}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \varphi}(r,\varphi) - \frac{\sin 2\varphi}{2r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}(r,\varphi) - \\
&\qquad - \frac{\cos 2\varphi}{r^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}(r,\varphi) - \frac{\sin 2\varphi}{2r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\varphi).
\end{aligned}$$

Připomeňme si, že spojitost druhých parciálních derivací f i $\tilde{f}$ umožňuje zaměňovat pořadí derivování při výpočtu druhých smíšených parciálních derivací. Zbývá tedy vyjádřit parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. To provedeme obdobným výpočtem, když dosadíme do první rovnice v (*) za g vyjádření pro $\frac{\partial f}{\partial x}$ a do druhé rovnice v (*) za g vyjádření pro $\frac{\partial f}{\partial y}$. Po krátkém výpočtu dostaneme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \\
&= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\varphi) - \frac{\sin 2\varphi}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \varphi}(r,\varphi) + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}(r,\varphi) + \\
&\qquad + \frac{\sin 2\varphi}{r^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\varphi}(r,\varphi) + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\varphi)
\end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) =$$
$$= \sin^2\varphi \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{\sin 2\varphi}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial\varphi}(r,\varphi) + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial\varphi^2}(r,\varphi) -$$
$$- \frac{\sin 2\varphi}{r^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\varphi}(r,\varphi) + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\varphi).$$

Spočtená vyjádření parciálních derivací funkce f nyní dosadíme do rovnice ze zadání; zároveň dosadíme $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$. Po elementárních úpravách dostaneme

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial\varphi^2}(r,\varphi) = 0.$$

Má-li nějaká funkce třídy C^2 splňovat tuto rovnici pro kladná r, pak je funkce $\tilde{f}(r,\cdot)$ nutně polynomem prvního stupně v proměnné φ. Protože je současně 2π periodická, je nutně konstatní. Z toho dostáváme, že $f(x,y) = \rho(\|(x,y)\|)$ pro nějaké $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je-li $x^2 + y^2 > 0$, a že taková funkce splňuje naši rovnici na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, pokud je třídy C^2. K tomu je nutné a stačí, aby funkce ρ byla třídy C^2 mimo počátek. Každé rozšíření do počátku, které je třídy C^2 bude řešením naší rovnice (ověřte si). To je možné, právě když ρ lze volit tak, aby ρ byla třídy C^2 na celém $\mathbb{R}$ a aby první derivace ρ v nule byla nulová (ověřte tím, že budete uvažovat např. funkci $\rho(\|(x,0)\|)$ jedné proměnné). Tím jsme popsali právě všechna řešení zadané úlohy. ■

§76. Další aplikací je derivování **implicitně zadaných funkcí**. To ještě vyžaduje větu následující.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F \in C^1(G)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ takové, že $(a,b) \in G$ a $F(a,b) = 0$. Nechť dále $\partial_{n+1}F(a,b) \neq 0$. Pak existuje okolí U bodu a, okolí V bodu b a funkce $f\colon U \to V$ třídy C^1 taková, že pro $(x,y) \in U \times V$ je $F(x,y) = 0$, právě když $y = f(x)$. Je-li navíc $F \in C^k(G)$, pak $f \in C^k(U)$.

P ř í k l a d Dokažte, že množina bodů (x,y) splňujících $xy+x^5+y^{15}-y^{13} = 0$ je v jistém okolí bodu $(0,1)$ grafem nějaké funkce $y = f(x)$, která je třídy C^∞ a splňuje $f(0) = 1$. Rozhodněte, zda je f na nějakém okolí bodu 0 rostoucí či klesající, konvexní či konkávní.

Řešení. První část úlohy, tj. důkaz existence funkce f, bude splněna, jestliže ověříme předpoklady věty o implicitní funkci.

Položme $F(x,y) = xy + x^5 + y^{15} - y^{13}$. Pak funkce F je zřejmě třídy C^∞ na $\mathbb{R}^2$ a platí $F(0,1) = 0$. Navíc $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = (x + 15y^{14} - 13y^{12})_{x=0,y=1} = 2 \neq 0$. Tím jsou předpoklady věty o implicitní funkci ověřeny, a tedy existuje okolí U bodu 0, okolí V bodu 1 a funkce $f\colon U \to V$ třídy C^∞ taková, že pro $(x,y) \in U \times V$ je $F(x,y) = 0$, právě když $y = f(x)$.

Pro zkoumání dalších vlastností funkce f spočteme její derivace v 0. Využijeme toho, že pro $x \in U$ platí $xf(x) + x^5 + f(x)^{15} - f(x)^{13} = 0$. Proto i všechny derivace funkce na levé straně jsou nulové na celém U. Speciálně pro $x \in U$ platí

$$f(x) + xf'(x) + 5x^4 + 15f(x)^{14}f'(x) - 13f(x)^{12}f'(x) = 0$$

a

$$\begin{aligned} f'(x) + f'(x) + xf''(x) + 20x^3 + 210f(x)^{13}f'(x)^2 + {}& \\ + 15f(x)^{14}f''(x) - 156f(x)^{11}f'(x)^2 - 13f(x)^{12}f''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Nyní do těchto rovností dosadíme $x = 0$. Z první, s využitím toho, že $f(0) = 1$, dostaneme $1 + 2f'(0) = 0$, neboli $f'(0) = -1/2$. Z druhé rovnosti pak (s využitím toho, že $f(0) = 1$ a $f'(0) = -1/2$) vychází $-1 + 210/4 - 156/4 + 2f''(0) = 0$, tedy $f''(0) = -25/4$.

První i druhá derivace jsou tedy záporné v bodě 0. Protože f je třídy C^∞, jsou všechny derivace v 0 spojité, a tedy první dvě jsou záporné na nějakém okolí 0. Na takto vybraném okolí je pak f klesající a ryze konkávní. ■

<u>Příklad</u> Dokažte, že rovnicí

$$z + \sin(xy) + \cos x = 1$$

je na nějakém okolí bodu $(y_0, z_0) = (1, 0)$ jednoznačně určena funkce dvou proměnných f s oborem hodnot v nějakém okolí bodu $x_0 = 0$ taková, že na jejím definičním oboru je splněna zadaná rovnost, pokud dosadíme $x = f(y,z)$. Spočtěte, čemu se rovná $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,1)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(0,1)$.

Řešení. Opět nejprve ověříme předpoklady věty o implicitní funkci, kterou použijeme pro hledání funkce f takové, aby platilo $f(1,0) = 0$. Položme $F(x,y,z) = z + \sin(xy) + \cos x - 1$. Pak funkce F je třídy C^2 (dokonce C^∞) na $\mathbb{R}^3$ a $F(0,1,0) = 0$.

(Všimněte si, že naším cílem je vyjádřit první souřadnici x v závislosti na zbylých souřadnicích y a z a nikoliv poslední souřadnici, jak tomu bylo ve větě. Snadno bychom mohli vyhovět i tomuto předpokladu věty, kdybychom zavedli označení $\Phi(\xi,\eta) = F(\eta,\xi_1,\xi_2)$, $\xi = (\xi_1,\xi_2)$. To v dalších příkladech nebudeme dělat. Uvědomíme si jenom, že to vede k tomu, že předpoklad nenulové parciální derivace funkce Φ podle poslední souřadnice v bodě $(\xi_0,\eta_0) = ((1,0),0)$ je ekvivalentní tomu, že parciální derivace F podle první proměnné je nenulová v bodě $(0,1,0)$.)

Tedy $\frac{\partial F}{\partial x}(0,1,0) = (y\cos(xy) - \sin x)_{x=0,y=1,z=0} = 1 \neq 0$ a existuje okolí U bodu $(1,0)$, okolí V bodu 0 a funkce $f : U \to V$ třídy C^2 taková, že pro $(x,y,z) \in V \times U$ je $F(x,y,z) = 0$, právě když $x = f(y,z)$.

Protože funkce dvou proměnných $F(f(y,z),y,z)$ je identicky rovna nule na U, má na U nulové parciální derivace. Dostáváme, že na U platí

$$0 = \frac{\partial F}{\partial y} = \cos(fy)\left(\frac{\partial f}{\partial y}y + f\right) - (\sin f)\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$0 = \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + \cos(fy)\left(\frac{\partial f}{\partial z}y\right) - (\sin f)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Chceme-li spočítat druhé parciální derivace funkce f na okolí U (nebo aspoň v bodě $(1,0)$), pak můžeme nyní postupovat dvěma způsoby. Můžeme vyjádřit první derivace f z uvedené soustavy dvou lineárních rovnic a pak počítat jejich první parciální derivace, nebo můžeme na členy uvedené soustavy aplikovat postupně parciální derivace podle y a podle z a dostaneme soustavu čtyř rovnic, ve které se budou vyskytovat všechny druhé parciální derivace f. Protože si ovšem uvědomíme, že v našem příkladu máme za úkol spočítat jen smíšené derivace, které se sobě rovnají, neboť f je třídy C^2, tak bude stačit derivovat jen první rovnici dle z:

$$0 = -\sin(fy)\frac{\partial f}{\partial z}y\left(\frac{\partial f}{\partial y}y + f\right) + \cos(fy)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}y + \frac{\partial f}{\partial z}\right) -$$
$$- (\cos f)\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} - (\sin f)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}.$$

Protože nám jde o výpočet v bodě $(1,0)$ (a nezapomeňme, že $f(1,0)=0$), mohli jsme rovnici zapsat již pro hodnoty v tomto bodě a za známé hodnoty dosadit, čímž by se rovnice zjednodušila. Dosaďme tedy nyní:

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,0) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,0) - \frac{\partial f}{\partial z}(1,0)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0).$$

Vidíme, že se budeme muset vrátit k rovnicím pro první parciální derivace a vyřešit je; stačí ovšem udělat to až po dosazení proměnných $y=1$ a $z=0$. To si můžeme pro příště pamatovat a rovnice po tomto dosazení vyřešit hned. Řešení je pak možná přehlednější. Máme proto $0 = \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$ a $0 = 1 + \frac{\partial f}{\partial z}(1,0)$, tj. $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial z}(1,0) = -1$. Dosazením do rovnice pro druhou smíšenou parciální derivaci konečně dostáváme, že $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,0) = 1$ a díky zmíněné záměnnosti parciálních derivací též $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(1,0) = 1$.

Poznamenejme ještě, že častější je psát v předchozích výrazech x namísto f, je ale nutné mít v patrnosti, že x je v tom případě třeba chápat jako funkci proměnných y a z. ■

§77. Záměna proměnných. V následujících dvou příkladech si vysvětlíme, o co jde v úlohách, ve kterých je naším úkolem „provést záměnu závisle i nezávisle proměnných". Vybrali jsme úlohy, ve kterých bude dobře patrný též význam takové záměny pro řešení některých úloh. Řadu dalších příkladů můžete najít ve standardních sbírkách. Ne vždy je však tomuto tématu věnováno místo též při teoretickém výkladu. Podrobné vysvětlení toho, o co jde, zejména jak odůvodnit jednotlivé kroky řešení pomocí vět o inverzním zobrazení a o implicitně zadaném zobrazení, ale též postup pomocí tzv. *přímé*, resp. *nepřímé metody*, lze najít v [DII, kap. IX]. Obvyklé však tak jako tak je, že se neformulují obecné věty a že se jednotlivé kroky více nebo méně přesně zdůvodňují při řešení každého příkladu zvlášť. To také uděláme a budeme se při tom snažit být dostatečně podrobní tak, aby vše podstatné bylo řečeno. Z výše popsaných důvodů bude náš popis řešení trochu obšírnější, než je pro danou úlohu nutné.

P ř í k l a d   Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ třídy C^3, které splňují (diferenciální) rovnici

$$f'(x)f'''(x) - 3(f''(x))^2 = 0$$

převedením úlohy pomocí substituce $x = q$, $y = p$, kde y je původní („stará") závisle proměnná a q je „nová" závisle proměnná. Stručněji řečeno, proveďte záměnu závisle proměnné a nezávisle proměnné.

Řešení. Nejprve vysvětleme, co v tomto případě znamená záměna proměnných.

Nechť f je dostatečně hladká (v našem případě třídy C^3) funkce definovaná na okolí bodu x_0 a nechť $y_0 = f(x_0)$. Nechť F je graf funkce f.

Uvažujme zobrazení $(X, Y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $X(p, q) = q$, $Y(p, q) = p$, které bod $(p_0, q_0) = (y_0, x_0)$ zobrazí na bod (x_0, y_0). Navíc existuje okolí U bodu (p_0, q_0), které se zobrazí na okolí V bodu (x_0, y_0) a na tomto okolí má (X, Y) inverzní zobrazení $\Phi = (P, Q)\colon V \to U$ třídy C^∞. (V našem případě je to jednoduché, protože (X, Y) je lineární izomorfismus $\mathbb{R}^2$ na sebe. Obecně můžeme použít větu o inverzním zobrazení, která nám říká, že máme-li C^1 zobrazení, které má nenulový jakobián v bodě (p_0, q_0), jde o difeomorfismus nějakého okolí (p_0, q_0) na nějaké okolí (x_0, y_0). Použitím věty o derivování složeného zobrazení se lze přesvědčit, že příslušné inverzní zobrazení je třídy C^k, je-li původní zobrazení navíc třídy C^k.)

Uvažme množinu $G = \Phi(F \cap V)$. Ptáme se, kdy je tato množina G grafem nějaké funkce $q = g(p)$ a jaké vlastnosti má funkce g v závislosti na vlastnostech funkce f. Zejména hledáme diferenciální rovnici, kterou splňuje funkce g, když (právě když) f splňuje rovnici v zadání.

Rovnici odvodíme ze vztahu $f(X(p, g(p))) = Y(p, g(p))$ na okolí (p_0, q_0), který je přeformulováním uvedeného vztahu mezi grafy funkcí f a g. V našem případě jde tedy o to, že má na onom okolí platit rovnost $f(g(p)) = p$ a že to splňuje jediná (třikrát spojitě) diferencovatelná funkce g s grafem v nějakém dosti malém, ale pevně zvoleném, okolí bodu (p_0, q_0). Chceme proto, aby rovnice $f(q) = p$ měla jediné takové řešení, neboli aby f bylo prosté zobrazení okolí q_0 na okolí p_0. Je-li f hladká s nenulovou derivací v x_0, pak to plyne z věty o derivaci inverzní funkce ([D1, Věta 125]). (V případě obecnějších X a Y je často možné rozhodnout, zda je rovnicí $f(X(p, q)) = Y(p, q)$ popsána jediná hladká funkce $q = g(p)$ na okolí p_0, s použitím věty o implicitně zadané funkci, tj. pro hladká f, X a Y, ověřením toho, kdy je $f'(X(p_0,q_0)))\,\frac{\partial X}{\partial q}(p_0,q_0)-\frac{\partial Y}{\partial q}(p_0,q_0)\neq 0$.)

K nalezení diferenciální rovnice pro g potřebujeme vyjádřit derivace funkce f v bodech okolí x_0 pomocí derivací funkce g na okolí p_0 a pomocí derivací funkcí X a Y na okolí (p_0,q_0).

Předpokládejme tedy nyní, že $(p_0,q_0)=(y_0,x_0)$ je vybráno tak, že $f'(x_0)\neq 0$ a ukažme si tzv. přímou metodu, při které potřebné vztahy obdržíme derivováním obou stran rovnosti $f(X(p,g(p)))=Y(p,g(p))$ pomocí věty o derivování složené funkce (viz začátek oddílu 11); nyní již tedy za předpokladu, že funkce g na okolí p_0 máme a že je to funkce, která má spojitou třetí derivací.

Máme tedy $f'(g(p))g'(p)=1$. Protože $f'(x_0)\neq 0$, můžeme předpokládat, že $g'(p)\neq 0$ na zvoleném okolí p_0. Máme trochu stručněji, že $f'\circ g=\frac{1}{g'}$. Dalším derivováním obou stran rovnice $(f'\circ g)\cdot g'=1$ dostáváme $(f''\circ g)\cdot(g')^2+(f'\circ g)\cdot g''=0$. Z toho díky našim předpokladům $f''(g(p))=\frac{-g''(p)}{(g'(p))^3}$. Konečně derivujme předcházející rovnici ještě jednou:

$$(f'''\circ g)\cdot(g')^3+(f''\circ g)\cdot 2g'\cdot g''+(f''\circ g)\cdot g'g''+(f'\circ g)\cdot g'''=0.$$

Dosadíme-li již spočtené, dostaneme, že $f'''(g(p))=\frac{3(g''(p))^2}{(g'(p))^5}-\frac{g'''(p)}{(g'(p))^4}$. Rovnice ze zadání úlohy tedy přejde na rovnici $\frac{-g'''(p)}{(g'(p))^5}+\frac{3(g''(p))^2}{(g'(p))^6}=\frac{3(g''(p))^2}{(g'(p))^6}$, tj. $g'''(p)=0$.

Je-li $g\colon(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ maximální řešení rovnice $g'''=0$, pro které je g' nenulová na (α,β), pak $g(p)=ap^2+bp+c$ pro nějaká $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Je-li $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ maximální řešení naší rovnice a I maximální interval, na kterém je f' nenulová, a tedy f' je nulová v těch krajních bodech I, které leží v $\mathbb{R}$. Pak f je na I inverzní k polynomu g nejvýše druhého stupně s nenulovou první derivací na $f(I)$. Protože g má vlastní derivaci na celém $\mathbb{R}$ a f je zřejmě inverzní ke g na uzávěru I, má f nenulovou derivaci v těch krajních bodech I, které leží v $\mathbb{R}$. Z toho vyplývá, že $I=\mathbb{R}$, a tedy, že g je polynom nejvýše druhého stupně, který má nenulovou derivaci na $\mathbb{R}$. Takovými polynomy jsou právě všechny nekonstantní polynomy prvního stupně.

Celkově tedy máme, že f je buď konstantní, nebo je to inverzní funkce k nekonstantnímu polynomu prvního stupně, což je opět polynom prvního stupně. Tedy f je polynom nejvýše prvního stupně. ■

V další úloze půjde o transformace parciálních derivací pomocí substituce, a to opět jak závisle tak nezávisle proměnných. Substituce bude popsána zobrazením, které „starým proměnným“ přiřazuje „nové“. Proto předvedeme řešení, kde budeme postupovat pomocí tzv. nepřímé metody, ve které derivujeme složené funkce podle starých proměnných. Opět používáme zdůvodnění, která mohou sloužit i v obecnějších případech.

V následujícím příkladu by bylo možné využít toho, že transformace mezi novými a starými nezávisle proměnnými na závisle proměnných nezávisí a že transformace závisle proměnných je popsána s pomocí jediné nezávisle proměnné x. Mohli bychom proto přechod od jedněch souřadnic ke druhým rozložit na dva jednodušší kroky. V prvním bychom přešli od z k w a ve druhém od x a y k u a v.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte všechna řešení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která jsou třídy C^2 a splňují (parciální diferenciální) rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ na } \mathbb{R}^2.$$

Použijte k tomu převedení rovnice pomocí záměny starých nezávislých proměnných x, y a staré závisle proměnné z novými nezávisle proměnnými $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$ a novou závisle proměnnou $w = \frac{z}{x}$.

Řešení. Označme si zobrazení $U(x, y, z) = x + y$, $V(x, y, z) = \frac{y}{x}$ a $W(x, y, z) = \frac{z}{x}$ definovaná na $\mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^2)$. Uvažujme zatím libovolný bod $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ takový, že $x_0 \neq 0$. Označme dále $u_0 = U(x_0, y_0, z_0)$, $v_0 = V(x_0, y_0, z_0)$, $w_0 = W(x_0, y_0, z_0)$. Vyšetříme, pro které body (x_0, y_0, z_0) je zobrazení (U, V, W) vzájemně jednoznačným zobrazením nějakého okolí bodu (x_0, y_0, z_0) na nějaké okolí bodu (u_0, v_0, w_0), přičemž jde o difeomorfismus. To ověříme v tomto případě snadno přímým výpočtem inverzního zobrazení dokonce k zobrazení (U, V, W) na celém definičním oboru vyjma bodů, ve kterých je $v_0 = \frac{y_0}{x_0} = -1$. Pro $v \neq -1$ dostáváme složky inverzního zobrazení $X(u, v, w) = \frac{u}{1+v}$, $Y(u, v, w) = \frac{uv}{1+v}$ a $Z(u, v, w) = \frac{vw}{1+v}$. O existenci okolí bodu (x_0, y_0, z_0), na kterém jde o (lokální) difeomorfismus, se můžeme (zejména v komplikovanějších příkladech) přesvědčit, když si uvědomíme, že funkce U, V a W jsou třídy C^1 a jakobián je roven $(\frac{1}{x_0} + \frac{y_0}{x_0^2})\frac{1}{x_0}$. Jeho nenulovost vyžaduje, aby byla splněna táž podmínka jako v předchozím přímém výpočtu, tj. $1 + \frac{y_0}{x_0} = 1 + v_0 \neq 0$.

Přechod od funkce $z = z(x, y)$ k funkci $w = w(u, v)$ (nyní užíváme, jak je obvyklé, značení z též pro funkci proměnných x, y a w pro funkci proměnných u, v na místě, kde jsme v předchozím příkladu volili pro větší přesnost značení f a η. Substituce nyní znamená, že mezi funkcemi z a w platí následující vztahy:

$z(x_0, y_0) = z_0$, $z(X(u, v, w(u, v)), Y(u, v, w(u, v))) = Z(u, v, w(u, v))$ a také

$w(u_0, v_0) = w_0$, $w(U(x, y, z(x, y)), V(x, y, z(x, y))) = W(x, y, z(x, y))$.

O tom, zda je těmito vztahy určena jednoznačně hladká funkce w na nějakém okolí bodu (u_0, v_0, w_0) se můžeme přesvědčit přímým výpočtem:

např. z rovnosti $z(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}) = \frac{vw}{1+w}$ vyplývá, že takovou funkci můžeme najít, právě když $v(= \frac{y}{x}) \neq 0$. V komplikovanějších příkladech bychom použili větu o implicitně zadané funkci. Derivace funkce $z(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}) - \frac{vw}{1+w}$ dle w je nenulová, pokud $v(= \frac{y}{x}) \neq 0$.

Jak jsme předeslali, budeme nyní vyjadřovat parciální derivace pro změnu z rovnosti $w(U(x, y, z(x, y)), V(x, y, z(x, y))) = W(x, y, z(x, y))$, tj. $w(x + y, \frac{y}{x})x = z$. Význam to pro nás má ovšem pouze, pokud $x \neq 0$, $\frac{y}{x} \neq -1$ a $y \neq 0$.

Počítejme

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{-y}{x^2}\right)\cdot x + w,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot x.$$

Dalším derivováním získaných vztahů dostáváme druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{-y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} + \left(\frac{-y}{x^2}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial w}{\partial v}\right]\cdot x + \\ + \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{-y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{-y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Provedeme-li dále podobně výpočet zbylých druhých parciálních derivací funkce z a dosadíme-li výsledky do rovnice $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, dostaneme rovnici $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(v+1)^2\frac{1}{x} = 0$, což je za našich předpokladů totéž jako $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

Každé řešení třídy C^2 musí být na okolí (u_0, v_0, z_0) tvaru $w(u,v) = \phi(u) + \psi(u)v$, čemuž odpovídá $z(x,y) = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$ na nějakém okolí bodu (x_0, y_0, z_0). Protože (X, Y, Z) je v našem případě prosté, C^2 hladké regulární na každé z šesti otevřených souvislých množin G_i, $i = 1, \dots, 6$, na které dělí rovinu přímky $x = 0$, $y = 0$ a $y = -x$, tak z musí být nalezeného tvaru $z(x,y) = x\phi_i(x+y) + y\psi_i(x+y)$ na G_i a navíc třídy C^2.

Je možné dále studovat, co to pro řešení rovnice znamená, ale to již je daleko od hlavního záměru tohoto příkladu. Pro zajímavost si ukažme, jak bychom mohli pokračovat. Nechť první kvadrant má index jedna a další komponenty jsou očíslovány proti směru hodinových ručiček. Dále je např. $\lim\limits_{x\to 0_-} z(x,y) = y\psi_2(y) = \lim\limits_{x\to 0_+} z(x,y) = y\psi_1(y)$ pro každé y větší než nula. Je tedy $y\psi_1(y) = y\psi_2(y) = z(0,y)$ pro $y > 0$. Proto je ψ_1 funkce třídy C^2 na intervalu $(0,\infty)$. Podobně pro $y < 0$ dostaneme, že $y\psi_4(y) = y\psi_5(y) = z(0,y)$. Nechť tedy ψ je definována jako $\psi_1 = \psi_2$ na $(0,\infty)$ a jako $\psi_4 = \psi_5$ na $(-\infty,\infty)$ a navíc tak, aby $y\psi(y)$ byla třídy C^2 na celém $\mathbb{R}$.

Podobně dojedeme k volbě $x\phi(x) = x\phi_3(x) = x\phi_4(x) = z(x,0)$ pro $x < 0$ a $x\phi(x) = x\phi_6(x) = x\phi_1(x) = z(x,0)$ pro $x > 0$ s $x\phi(x)$ třídy C^2 na $\mathbb{R}$.

Podobnými úvahami pro body přímky $y = -x$ dojdeme k tomu, že musí platit $\phi(0) - \psi_3(0) = \phi_2(0) - \psi(0)$ a $\phi_5(0) - \psi(0) = \phi(0) - \psi_6(0)$.

Zvolíme-li funkce ϕ, ψ, ϕ_2, ϕ_5, ψ_3 a ψ_6 tak, aby splňovaly uvedené podmínky a aby z definované s jejich pomocí bylo třídy C^2, pak jde o řešení, neboť na každé z komponent G_i je to řešení a funkce na obou stranách rovnice jsou spojité. ■

§78. Implicitně zadaná zobrazení. V předchozích příkladech na záměnu proměnných šlo mimo jiné o studium implicitně zadaných funkcí. Ukázali jsme si, že ve zvolených příkladech to šlo studovat přímým výpočtem nebo též použitím věty o implicitně zadané funkci. Nyní si připomeňme větu o implicitně zadaném zobrazení (jinými slovy několika reálných funkcích, které tvoří složky takového zobrazení).

Je-li $F\colon G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ zobrazení otevřené množiny G do $\mathbb{R}^k$ třídy C^1, je-li $F(a,b) = 0 \in \mathbb{R}^k$ pro nějaké $(a,b) \in G$ a je-li jakobián zobrazení $y \in \mathbb{R}^k \mapsto F(a,y)$ nenulový v bodě $b \in \mathbb{R}^k$, pak existují okolí U bodu a a okolí V bodu b taková, že pro všechna $x \in U$ existuje právě jedno $y = f(x) \in V$ tak, že $F(x, f(x)) = 0$. Přitom f je třídy C^1 a je-li navíc F třídy C^p, pak i o f lze tvrdit totéž.

I tato věta má aplikace na záměnu závisle i nezávisle proměnných. Takovými příklady se zde však již nebudeme zabývat.

Uveďme si jen dva příklady na přímou aplikaci předchozí věty.

<u>Příklad</u> Dokažte, že rovnicemi

$$\begin{aligned} z + \sin(xy) + \cos x &= 1, \\ e^x y &= 1 \end{aligned}$$

je na nějakém okolí bodu $z_0 = 0$ v $\mathbb{R}$ určena jednoznačně funkce f do nějakého okolí bodu $(x_0, y_0) = (0,1)$ taková, že jsou na jejím definičním oboru splněny obě zadané rovnosti, pokud dosadíme $x = f_1(z)$ a $y = f_2(z)$. Spočtěte, čemu se rovná $f'(0)$.

Řešení. Položme $F_1(x,y,z) = z + \sin(xy) + \cos x - 1$ a $F_2(x,y,z) = e^x y - 1$. Jsou to funkce definované na $\mathbb{R}^2$, které jsou třídy C^∞. Chceme-li užít větu o implicitně zadaném zobrazení, v našem příkladu implicitně zadaných funkcí $x = f_1(z)$ a $y = f_2(z)$ v okolí bodu $(f_1(0), f_2(0), 0) = (0,1,0)$, musíme ověřit, že jakobián

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(0,1,0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(0,1,0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(0,1,0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(0,1,0) \end{vmatrix}$$

je různý od nuly.[4] Výpočtem se přesvědčíme, že je roven jedné.

Můžeme tedy předpokládat, že f_1 a f_2 jsou hladké (dokonce C^∞) funkce na okolí 0 splňující naše požadavky a derivujme rovnosti, ve kterých $x = f_1(z)$ a $y = f_2(z)$, podle z:

$$\begin{aligned} 1 + (\cos xy)(x'y + xy') - (\sin x)x' &= 0 \text{ a} \\ e^x y x' + e^x y' &= 0. \end{aligned}$$

Po dosazení $z = 0$ dostáváme $1 + f_1'(0) = 0$ a $f_1'(0) + f_2'(0) = 0$, a tedy $f'(0) = (-1, 1)$. ■

<u>Příklad</u> Uvažujme dráhu „objektu“, který se nachází v čase t v bodě $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$. Nechť je splněno v každém $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, že $t + \sin x(t) + e^{y(t)} = 1$

[4]Protože předchozí věta hovoří o vyjádření posledních proměnných v závislosti na prvních, můžeme uvažovat podobně jako při řešení druhého příkladu v §76 pomocná zobrazení $\Phi_1(\xi, \eta) = F_1(\eta_1, \eta_2, \xi)$, $\Phi_2(\xi, \eta) = F_2(\eta_1, \eta_2, \xi)$, kde $\eta = (\eta_1, \eta_2)$.

a $t + \cos x(t) + \log(1 + y(t)) = 1$, přičemž v čase 0 je objekt v počátku. Spočtěte zrychlení $(x''(0), y''(0))$, které má zmíněný objekt v čase 0.

Řešení. Položme $F_1(t,x,y) = t+\sin x+e^y-1$ a $F_2(t,x,y) = t+\cos x+\log(1+y)-1$. Tato zobrazení jsou na otevřené množině $G = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \colon y \in (-1,\infty)\}$ třídy C^∞, tedy i C^2. Jakobián

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(0,0,0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0,0) \end{vmatrix}$$

je roven jedné, a tedy je nenulový. Podle věty o implicitně zadaném zobrazení je rovnicemi na nějakém okolí U nuly určeno jednoznačně zobrazení $t \mapsto (x(t), y(t))$ do nějakého okolí bodu $(0,0)$, které je třídy C^2. Z rovnic dostáváme, že první derivace x a y pro $t \in U$ musejí splňovat

$$\begin{aligned} 1 + (\cos x)x'(t) + e^y y'(t) &= 0 \text{ a} \\ 1 - (\sin x)x'(t) + \frac{1}{1+y}y'(t) &= 0, \end{aligned}$$

speciálně je tedy $x'(0) = 0$ a $y'(0) = -1$. Dalším derivováním a dosazením za $x(0)$, $y(0)$, $x'(0)$ a $y'(0)$ dostáváme

$$\begin{aligned} x''(0) + 1 + y''(0) &= 0 \text{ a} \\ -1 + y''(0) &= 0. \end{aligned}$$

Konečně tedy máme, že $(x''(0), y''(0)) = (-2, 1)$. ∎

§79. Třebaže věta o implicitní funkci je svou podstatou lokální, kombinace s jinými metodami někdy umožňuje vyšetřit **globální chování implicitně zadaných funkcí**. Ilustrujeme si to na jednom příkladu.

<u>P ř í k l a d</u> Vyšetřete tvar množiny

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \operatorname{arctg} x = y^3 \operatorname{arctg} y\}.$$

Řešení. Zadání není zcela přesné. Řekněme si nejprve, že se jím může myslet zjistit, zda je množina M sjednocením několika (a kolika) grafů funkcí a vyšetřit chování (průběh) těchto funkcí. Označme $F(x,y) = x \operatorname{arctg} x - y^3 \operatorname{arctg} y$. Pak funkce F je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^2$ a naše množina je nulovou hladinou (vrstevnicí) této funkce.
`Krok 1.` Pro pevné $x \in \mathbb{R}$ zjistěme počet a přibližnou polohu takových $y \in \mathbb{R}$, že $(x,y) \in M$. Za tím účelem zavedeme funkci $f_x(y) = F(x,y)$ definovanou na $\mathbb{R}$. Jest $f_x'(y) = -3y^2 \operatorname{arctg} y - \frac{y^3}{1+y^2}$ pro $y \in R$. Odtud vidíme, že $f_x'(y) > 0$ pro $y < 0$ a

$f_x'(y) < 0$ pro $y > 0$. Tedy funkce f_x je rostoucí na $(-\infty, 0]$ a klesající na $[0, +\infty)$, v 0 má maximum. Přitom $f_x(0) = x \operatorname{arctg} x$.

Je-li tedy $x = 0$, pak rovnice $f_x(y) = 0$ má jediné řešení, a to $y = 0$. Tedy množina M obsahuje jediný bod osy y, a to bod $(0,0)$.

Je-li $x \neq 0$, pak $f_x(0) > 0$. Navíc zřejmě $\lim\limits_{y\to+\infty} f_x(y) = \lim\limits_{y\to-\infty} f_x(y) = -\infty$. Proto má rovnice $f_x(y) = 0$ dvě řešení, jedno kladné a jedno záporné.

Závěr: Pro $x < 0$ existují právě dvě čísla $y_1(x) < 0$ a $y_2(x) > 0$ splňující $(x, y_i(x)) \in M$. Pro $x = 0$ existuje takové číslo právě jedno, a to 0. Pro $x > 0$ existují taková čísla právě dvě, řekněme $y_3(x) < 0$ a $y_4(x) > 0$.

`Krok 2.` Z věty o implicitní funkci plyne, že funkce y_1 a y_2 jsou třídy C^∞ na $(-\infty, 0)$ a funkce y_3 a y_4 jsou C^∞ na $(0, +\infty)$. Zdůvodněme si to podrobně například pro funkci y_1. Vezměme libovolné $x_0 < 0$ a uvažme bod $(x_0, y_1(x_0))$. V tomto bodě jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci z §76 (jest $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_1(x_0)) = (-3y^2 \operatorname{arctg} y - \frac{y^3}{y^2+1})_{y=y_1(x_0)} > 0$). Proto je na jistém okolí bodu $(x_0, y_1(x_0))$ vztahem $F(x,y) = 0$ určena funkce $y = f(x)$ třídy C^∞. Toto okolí lze vzít tak malé, aby celé leželo ve druhém kvadrantu. Pak ovšem z kroku 1 ihned plyne, že $f(x) = y_1(x)$ na svém definičním oboru. Proto je funkce y_1 třídy C^∞ na nějakém okolí každého $x_0 < 0$, tedy i na $(-\infty, 0)$. Podobně lze zdůvodnit tvrzení pro ostatní funkce y_i.

`Krok 3.` Je-li $i \in \{1, \ldots, 4\}$, pak platí $x \operatorname{arctg} x - (y_i(x))^3 \operatorname{arctg} y_i(x) = 0$ na $(-\infty, 0)$ resp. $(0, +\infty)$. Na stejném intervalu tedy platí

$$\operatorname{arctg} x + \tfrac{x}{1+x^2} - \big(3(y_i(x))^2 \operatorname{arctg} y_i(x) + \tfrac{(y_i(x))^3}{1+(y_i(x))^2}\big) y_i'(x) = 0,$$

tedy $y_i'(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}}{3(y_i(x))^2 \operatorname{arctg} y_i(x) + \frac{(y_i(x))^3}{1+(y_i(x))^2}}$.

Odtud snadno plyne, že y_1 je rostoucí na $(-\infty, 0)$, y_2 je klesající na $(-\infty, 0)$, y_3 je klesající na $(0, +\infty)$ a y_4 rostoucí na $(0, +\infty)$.

`Krok 4.` Protože y_i je monotónní na svém definičním oboru, má v krajních bodech limity. Spočtěme nejprve limitu v 0 (píšeme $\lim\limits_{x\to0}$, ale myslíme příslušnou jednostrannou limitu, neboli limitu vzhledem k definičnímu oboru). Jest $\lim\limits_{x\to0} y_i(x) = c_i \in \mathbb{R}$ (limita je vlastní – funkce y_1 je rostoucí a záporná, má tedy vlastní limitu, podobně pro ostatní funkce).

Je $0 = \lim\limits_{x\to0} (x \operatorname{arctg} x - (y_i(x))^3 \operatorname{arctg} y_i(x)) = -c_i^3 \operatorname{arctg} c_i$, tedy $c_i = 0$.

Podobně existuje limita v $-\infty$ resp. $+\infty$, označme ji d_i. Protože

$$\lim_{x\to\infty} (x \operatorname{arctg} x - (y_i(x))^3 \operatorname{arctg} y_i(x)) = 0 \text{ a } \lim_{x\to\infty} x \operatorname{arctg} x = +\infty,$$

je nutně $\lim\limits_{x\to\infty} (y_i(x))^3 \operatorname{arctg} y_i(x) = +\infty$. Proto $d_1 = d_3 = -\infty$, $d_2 = d_4 = +\infty$.

`Shrnutí.` Množina M se skládá z grafů čtyř spojitých funkcí $\tilde{y}_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Všechny čtyři funkce mají v 0 hodnotu 0. Přitom funkce $\tilde{y}_1$ je rostoucí na $(-\infty, 0]$, v $-\infty$ má limitu $-\infty$ a je třídy C^∞ na $(-\infty, 0)$. Podobně lze popsat zbývající tři funkce.

Rozmyslete si, že množinu M lze několika způsoby zapsat jako sjednocení dvou grafů spojitých funkcí definovaných na $\mathbb{R}$.

■

Poznámka. Mohli bychom vyšetřovat další vlastnosti funkcí $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_4$ – jednostranné derivace v 0, konvexitu a konkávnost, asymptoty v $\pm\infty$. Nicméně to dělat nebudeme – například výraz pro druhou derivaci by již byl značně nepřehledný. Cílem bylo ilustrovat metody používané při globální analýze implicitně zadaných křivek.

12. Posloupnosti funkcí

Připomeňme si, že posloupnost funkcí $f_n\colon M \to P$ definovaných na množině M do metrického prostoru (P, σ) *konverguje bodově* k funkci $f\colon M \to P$, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ v P pro každé $x \in M$. Píšeme krátce $f_n \to f$.

Pokud platí

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n>n_0} \forall_{x\in M}\, \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

říkáme, že posloupnost f_n *konverguje stejnoměrně* k f (na M) a píšeme $f_n \rightrightarrows f$ (na M).

Je-li i M metrický prostor, říkáme, že f_n *konverguje lokálně stejnoměrně* k f (na M), jestliže pro libovolný prvek $x \in M$ konverguje f_n stejnoměrně k f na nějakém okolí x.

Poznamenejme, že konverguje-li posloupnost funkcí stejnoměrně (případně lokálně stejnoměrně) k funkci f, pak konverguje k f i bodově. Toto pozorování budeme často používat.

Na následujících příkladech si předvedeme, jak lze zkoumat, k jaké funkci posloupnost funkcí konverguje a o jaký typ konvergence jde.

Zatímco při vyšetřování bodové konvergence posloupnosti funkcí f_n jde vlastně o vyšetřování posloupnosti $f_n(x)$ pro každé $x \in M$ zvlášť, tedy o vyšetřování „limity s parametrem“, tak při vyšetřování zbývajících konvergencí jde o něco nového a budou se nám hodit některé postačující či nutné podmínky.

§80. Nutná a postačující podmínka pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí. *Posloupnost $f_n\colon M \to (P, \sigma)$ konverguje k $f\colon M \to P$ stejnoměrně, právě když*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\sigma(f_n(x), f(x))\colon x \in M\} = 0.$$

<u>Příklad</u> Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2}.$$

Řešení. Nejprve vyšetříme bodovou konvergenci, tj. konvergenci posloupnosti reálných čísel $f_n(x)$ pro všechny hodnoty reálného parametru x. Pro pevně zvolené $x \in \mathbb{R}$ nenulové je $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^3}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} x\frac{1}{\frac{1}{n^2x^2}+1} = x$. Zároveň platí zřejmě $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$, a tedy posloupnost funkcí f_n konverguje bodově k funkci f, kde $f(x) = x$ na $\mathbb{R}$.

Dále vyšetříme, zda je tato konvergence dokonce stejnoměrná. Chceme zjistit, čemu se rovná $\sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon x \in \mathbb{R}\}$. Zkoumejme za tím účelem extrémy funkce $f_n - f$. Platí, že $(f_n - f)'(x) = (-\frac{x}{1+n^2x^2})' = -\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. Tato derivace je tedy nulová, právě když $x = \frac{1}{n}$ nebo $x = -\frac{1}{n}$ a pro x blížící se k plus nebo k minus nekonečnu má $f_n - f$ limitu nula. Z toho plyne, že $f_n - f$ nabývá v bodě $\frac{1}{n}$ své maximální hodnoty $\frac{1}{2n}$ a v bodě $-\frac{1}{n}$ své minimální hodnoty $-\frac{1}{2n}$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon x \in \mathbb{R}\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$ a dostáváme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$. ■

<u>Příklad</u> Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

na intervalu $[0, 1]$.

Řešení. Snadno zjistíme, že posloupnost $f_n(x)$ konverguje k nule pro každé x z intervalu $[0, 1]$, a posloupnost tedy konverguje k nulové funkci bodově na intervalu $[0, 1]$.

Pokud posloupnost f_n konverguje stejnoměrně, pak musí konvergovat i posloupnost čísel $\sup\{|f_n(x)|\colon x \in [0, 1]\}$ k nule. Funkce f_n jsou spojité na kompaktním intervalu $[0, 1]$, a tedy nabývají svého minima i maxima. V krajních bodech mají hodnotu nula a pro $x \in (0, 1)$ je derivace $f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1}$. Ta je nulová právě pro jediné $x \in (0, 1)$, a to pro $x = \frac{1}{n+1}$. Platí tedy, že $\sup\{|f_n(x)|\colon x \in [0, 1]\}$ je rovno $(\frac{n}{n+1})^{n+1}$. Posloupnost těchto suprem (maxim) má limitu $\frac{1}{e}$, tedy nenulovou a posloupnost f_n nekonverguje stejnoměrně k nulové funkci na intervalu $[0, 1]$. ■

<u>Příklad</u> Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí

$$x^n - x^{n+1}.$$

Řešení. Označme $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Pokud $x \leq -1$ nebo $x > 1$, posloupnost reálných čísel $f_n(x)$ nekonverguje.

Pro $x \in (-1,1]$ je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x)x^n = 0$ a maximální množinou $M \subset \mathbb{R}$, pro kterou platí, že posloupnost funkcí f_n konverguje bodově na M, je interval $(-1,1]$ a funkce f_n na tomto intervalu konvergují bodově k nulové funkci.

Vyšetříme, zda je tato konvergence stejnoměrná. Protože $|f_n(-1)| = 2$ a f_n je spojitá na intervalu $[-1,1]$, je $\sup\{|f_n(x)|\colon x \in (-1,1]\}$ alespoň 2 pro všechna n, a tedy funkce f_n nekonvergují stejnoměrně na M ani na žádné podmnožině M, která obsahuje posloupnost konvergující k -1, t.j. M má neprázdný průnik s každým okolím bodu -1. Uvažujme nyní libovolnou množinu $N \subset M$, jejíž uzávěr neobsahuje -1. Existuje tedy $\varepsilon \in (0,2)$ takové, že $N \subset (-1+\varepsilon, 1]$. Derivace $f_n'(x)$ je nulová, právě když $x = \frac{n}{n+1}$. Supremum množiny čísel $|f_n(x)|$, $x \in N$, je tedy menší nebo rovno největšímu z čísel $|f_n(-1+\varepsilon)|$, $|f_n(1)|$ a $|f_n(\frac{n}{n+1})|$. Posloupnosti čísel $|f_n(-1+\varepsilon)|$ i čísel $|f_n(1)|$ konvergují k nule, neboť posloupnost f_n konverguje bodově k nulové funkci na intervalu $(-1,1]$. Máme $f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\frac{n}{n+1}) = 0\cdot\frac{1}{e} = 0$. Proto konverguje k nule i posloupnost maxim z čísel $|f_n(-1+\varepsilon)|$, $|f_n(1)|$ a $|f_n(\frac{n}{n+1})|$, a tedy i posloupnost suprem funkcí f_n na N. Proto je konvergence posloupnosti f_n na N stejnoměrná.

Protože libovolný bod intervalu $(-1,1]$ je obsažen v intervalu $(-1+\varepsilon,1]$ pro dostatečně malé kladné ε i se svým okolím, je konvergence posloupnosti funkcí f_n k nulové funkci na intervalu $(-1,1]$ lokálně stejnoměrná. ■

<u>P ř í k l a d</u> Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x) = e^{-|x-\frac{1}{n}|n^2}$ na $\mathbb{R}$.

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že posloupnost funkcí f_n konverguje bodově k nulové funkci na $\mathbb{R}$.

Tato konvergence není stejnoměrná, neboť $\sup\{|f_n(x)|\colon x \in \mathbb{R}\} \geq |f_n(\frac{1}{n})| = 1$.

Z téhož důvodu tato konvergence není ani lokálně stejnoměrná, neboť pro každé okolí nuly U leží nekonečně z hodnot $\frac{1}{n}$ v U, a proto ani posloupnost suprem $\sup\{|f_n(x)|\colon x \in U\}$ nekonverguje k nule. ■

Na následujícím příkladu si ukážeme, že není vždy účelné (a ani možné) vyšetřovat stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí f_n k funkci f na množině M výpočtem hodnot $\sup\{|f_n(x) - f(x)|\colon x \in M\}$.

<u>P ř í k l a d</u> Nechť $f_n(x) = (\log x)\cdot\sin\frac{x}{n(1+x^2)}$ pro $x > 0$. Dokažte, že $f_n \rightrightarrows 0$ na intervalu $(0,\infty)$.

Řešení. Uvědomme si, že platí $\sin x \leq x$ pro všechna $x \geq 0$, protože $\sin 0 = 0$ a rozdíl $x - \sin x$ je neklesající funkce, neboť $(x-\sin x)' = 1-\cos x \geq 0$.

Pro $x \in (0,1]$ užijeme toho, že

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x\log x|}{n} \leq \frac{a}{n},$$

kde $a = \max\{|x \log x| \colon x \in (0,1]\}$. Takto definované reálné číslo a skutečně existuje, protože funkce $|x \log x|$ je po dodefinování hodnotou nula v nule spojitá na uzavřeném intervalu $[0,1]$.

Pro $x \in [1,\infty)$ užijeme toho, že

$$|f_n(x)| \le \frac{\log x}{nx} \le \frac{b}{n},$$

kde $b = \max\{\frac{\log x}{x} \colon x \in [1,\infty)\}$. Tentokrát existuje maximum b proto, že funkce $\frac{\log x}{x}$ je na intervalu $[1,\infty)$ spojitá a má limitu nula v nekonečnu.

Celkem tedy máme $\sup\{|f_n(x)| \colon x \in (0,\infty)\} \le \frac{\max\{a,b\}}{n}$, a protože číselná posloupnost $\frac{\max\{a,b\}}{n}$ má limitu nula, konverguje posloupnost funkcí f_n stejnoměrně k nule na intervalu $(0,\infty)$. ■

§81. Záměna limit. Povšimněte si, že posloupnost funkcí v posledním příkladu konverguje bodově ke spojité funkci a při tom nikoliv lokálně stejnoměrně. To je způsobeno chováním funkcí f_n v okolí bodu nula. Zkuste si rozmyslet, zda existuje taková posloupnost f_n spojitých funkcí na $\mathbb{R}$, která konverguje k nulové funkci bodově a nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu. My budeme v dalším užívat následující postačující podmínku pro spojitost limitní funkce. Předchozí příklad ukazuje, že nejde o podmínku nutnou.

Nechť posloupnost spojitých zobrazení $f_n \colon (M,\rho) \to (P,\sigma)$ konverguje k zobrazení $f \colon M \to P$ lokálně stejnoměrně na M. Pak zobrazení f je spojité na (M,ρ).

O něco silnějším výsledkem je věta (Moore-Osgoodova) o záměně limit:

Nechť $a \in M$ není izolovaný bod prostoru M a nechť posloupnost zobrazení $f_n \colon (M \setminus \{a\},\rho) \to (P,\sigma)$ konverguje stejnoměrně k zobrazení f z M do P na nějakém prstencovém okolí a. Předpokládejme, že (P,σ) je úplný metrický prostor, např. $\mathbb{R}^k$. Pak platí, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x),$$

pokud $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existuje pro každé n přirozené.

Poznámka. Aplikací předchozího tvrzení na metrický prostor $(\mathbb{R}^*,\rho^*)$, kde $\mathbb{R}^* = [-\infty,\infty]$ a ρ^* je redukovaná metrika, dostáváme též varianty, ve kterých $a = +\infty$ či $a = -\infty$.

<u>Příklad</u> Konverguje posloupnost funkcí $e^{-(nx)^2}$ stejnoměrně (lokálně stejnoměrně) na $\mathbb{R}$?

Řešení. Funkce $f_n(x) = e^{-(nx)^2}$ jsou spojité na $\mathbb{R}$ a konvergují bodově k charakteristické funkci f jednoprvkové množiny $\{0\}$. Ta není spojitá, a podle předchozího tvrzení nemůže jít o konvergenci lokálně stejnoměrnou, a tedy ani stejnoměrnou na $\mathbb{R}$.

Nepatrně jiným argumentem je, že $0 = \lim_{x\to 0} f(x) \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ a tvrzení o záměně limit říká, že nemůže jít o lokálně stejnoměrnou konvergenci. ■

<u>P ř í k l a d</u> Konverguje posloupnost funkcí $f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}$?

Řešení. Je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$. Kdyby posloupnost f_n konvergovala stejnoměrně k f, tak by podle poznámky platilo, že $1 = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$, což není možné. Tedy daná posloupnost funkcí nekonverguje na $\mathbb{R}$ stejnoměrně.

Metodami předchozího paragrafu ověřte, že posloupnost restrikcí f_n na interval $[-k, k]$ konverguje stejnoměrně pro každé $k > 0$ a posloupnost f_n tedy konverguje k f lokálně stejnoměrně. ■

<u>P ř í k l a d</u> Vyšetřete konvergenci posloupnosti funkcí $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{nx}$.

Řešení. Všechny funkce f_n jsou definovány na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a konvergují bodově k funkci $f(x) = 0$ na této množině, neboť funkce $\operatorname{arctg} nx$ je omezená a funkce $\frac{1}{nx}$ konvergují k nulové funkci bodově.

Tato konvergence není stejnoměrná na žádné množině, která obsahuje posloupnost $x_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, konvergující k nule, neboť $\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = 1 \neq 0 = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Kdyby totiž konvergovala stejnoměrně na $\{x_k \colon k \in \mathbb{N}\}$, pak by se podle výše uvedené věty o záměně limit aplikované na metrický prostor $M = \{0\} \cup \{x_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ musely obě dvojnásobné limity rovnat. ■

§82. Omezenost limity. *Pokud posloupnost omezených funkcí $f_n \colon M \to \mathbb{R}$ konverguje stejnoměrně k funkci $f \colon M \to \mathbb{R}$, pak je i f omezená funkce na M.*

<u>P ř í k l a d</u> Konverguje posloupnost funkcí $f_n(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$ stejnoměrně na $(0, \infty)$?

Řešení. Funkce f_n jsou omezené na $(0, \infty)$. Konvergují bodově k funkci $\frac{1}{x}$. Protože ta není na intervalu $(0, \infty)$ omezená, nekonverguje posloupnost funkcí f_n stejnoměrně. ■

§83. Záměna limity a derivace. *Je-li I omezený otevřený interval v $\mathbb{R}$, konverguje-li posloupnost funkcí $F_n' \colon I \to \mathbb{R}$ (lokálně) stejnoměrně k $f \colon I \to \mathbb{R}$ na I a existuje-li vlastní $\lim_{n\to\infty} F_n(a)$ pro nějaké $a \in I$, pak posloupnost F_n konverguje (lokálně) stejnoměrně k nějaké funkci F na I. Navíc platí, že $F' = f$ na I.*

<u>P ř í k l a d</u> Nechť $F_n(x) = \int_0^x (1 - \frac{y^2}{n})^n \, dy$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $F(x) = \int_0^x e^{-y^2} \, dy$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. (Určitým integrálem

rozumíme Riemannův integrál.)

Řešení. Funkce jsou definovány na $\mathbb{R}$, protože jde o integrály ze spojitých funkcí na uzavřených intervalech. Všechny funkce F_n i F jsou liché. To plyne snadno z toho, že jde o integrály ze sudých funkcí a z definice určitého integrálu s libovolným pořadím mezí např. pomocí věty o substituci pro Newtonův integrál a z toho, že Newtonův a Riemannův integrál pro spojité funkce na uzavřeném intervalu jsou jedno a totéž.

Dále platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(0) = 0 = F(0)$. Protože jde o Newtonovy integrály, je $F_n(x)$ rovno přírůstku primitivní funkce k funkci $(1-\frac{y^2}{n})^n$ od nuly do x. Je tedy $F_n'(x) = (1-\frac{x^2}{n})^n$. Podobně je $F'(x) = e^{-x^2}$. Je nám jistě známo, že posloupnost $F_n'(y)$ konverguje k $F'(y)$ pro každé y. Dokážeme si, že tato konvergence je stejnoměrná na uzavřených intervalech $[-x, x]$ pro libovolné $x > 0$. Je $F_n'(y) = e^{-y^2 \frac{\log(1-\frac{y^2}{n})}{-\frac{y^2}{n}}}$. Pokud $|y| \le x$ a $\varepsilon > 0$, je pro dosti velká n hodnota zlomku $\frac{\log(1-\frac{y^2}{n})}{-\frac{y^2}{n}}$ v intervalu $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Funkce $F_n'(y)$ tedy leží na intervalu $[-x, x]$ mezi funkcemi $e^{-y^2(1+\varepsilon)}$ a $e^{-y^2(1-\varepsilon)}$. Z toho snadno plyne, že

$$
\begin{aligned}
e^{-\varepsilon x^2} - 1 \le e^{-0}(e^{-\varepsilon x^2} - 1) \le e^{-y^2}(e^{-\varepsilon y^2} - 1) \le \\
\le F_n'(y) - F'(y) \le e^{-y^2}(e^{\varepsilon y^2} - 1) \le e^{-0}(e^{\varepsilon x^2} - 1) \le e^{\varepsilon x^2} - 1
\end{aligned}
$$

pro všechna $y \in [-x, x]$, a tedy i to, že F_n' konvergují stejnoměrně k F' na $[-x, x]$, neboť ε můžeme volit tak malé, že $|e^{-\varepsilon x^2} - 1|$ i $|e^{\varepsilon x^2} - 1|$ jsou menší než libovolně malé předem zvolené kladné číslo.

Z předchozího tvrzení konvergují i F_n k F stejnoměrně na $[-x, x]$ pro všechna $x > 0$. Speciálně konverguje posloupnost $F_n(x)$ k $F(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, což jsme měli ukázat. ■

Pro řešení příkladů na konvergenci posloupností funkcí, tak jako při konvergenci číselných posloupností, je vhodné uvědomit si, kdy lze zaměňovat konvergenci posloupností funkcí s aritmetickými či dalšími operacemi. Dokažme si v následujícím příkladu, který má obecnější význam, tvrzení tohoto typu.

<u>P ř í k l a d</u> Dokažte tvrzení:
Nechť M je množina, (P, σ) a (Q, τ) jsou metrické prostory. Nechť $f_n\colon M \to P$, $g_n\colon P \to Q$, g_n jsou stejnoměrně spojitá, $f_n \rightrightarrows f$ na M a $g_n \rightrightarrows g$ na P.

Pak $g_n \circ f_n \rightrightarrows g \circ f$ na M.

Odvoďte, že lze zaměnit součet a stejnoměrnou konvergenci pro dvě posloupnosti reálných funkcí.

Ukažte totéž pro součin funkcí s hodnotami v omezeném intervalu.

Řešení.

(1) Pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $y \in P$ platilo, že $\tau(g_n(y), g(y)) < \varepsilon$.

Zobrazení g_{n_0} je stejnoměrně spojité, a proto najdeme $\delta > 0$ tak, aby pro všechna $y_1, y_2 \in P$, pro která $\sigma(y_1, y_2) < \delta$, platilo, že $\tau(g_{n_0}(y_1), g_{n_0}(y_2)) < \varepsilon$.

Nakonec zvolme $n_1 \geq n_0$ tak, aby pro $n \geq n_1$ a všechna $x \in M$ platilo, že $\sigma(f_n(x), f(x)) < \delta$.

Nyní pro $n > n_1$ a libovolné $x \in M$ máme

$$\begin{aligned}\tau(g \circ f(x), g_n \circ f_n(x)) \leq \tau(g(f(x)), g_{n_0}(f(x))) + \tau(g_{n_0}(f(x)), g_{n_0}(f_n(x))) + \\ + \tau(g_{n_0}(f_n(x)), g(f_n(x))) + \tau(g(f_n(x)), g_n(f_n(x))) < 4\varepsilon.\end{aligned}$$

(2) Nechť a_n a b_n jsou reálné funkce na množině M, které stejnoměrně konvergují k a, resp. k b. Uvažuje zobrazení $f_n(x) = (a_n(x), b_n(x))$, $f(x) = (a(x), b(x))$ na M a $g_n(y_1, y_2) = g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ na $\mathbb{R}^2$. Funkce g je lineární forma, a proto je stejnoměrně spojitá. Zobrazení f_n konvergují stejnoměrně k f na M. Tedy můžeme použít (1).

(3) Nechť a_n, a, b_n, b jsou jako v (2) a navíc s hodnotami v kompaktním intervalu I. Zobrazení f_n i f definujme jako v (2) a uvažme, že $g(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2$ je spojité na kompaktní množině I. Známá věta říká, že takové g je stejnoměrně spojité na I a můžeme použít (1).

■

13. Konvergence řad funkcí

Říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ reálných (případně komplexních) funkcí definovaných na množině M konverguje stejnoměrně na množině M (lokálně stejnoměrně na M v případě, že M je metrický prostor), pokud takovým způsobem konverguje posloupnost částečných součtů. Ukážeme si metody vyšetřování stejnoměrné (a lokálně stejnoměrné) konvergence řad funkcí. Mnohé z nich jsou analogií metod pro vyšetřování konvergence číselných řad z oddílu 6.

§84. Základní nutnou podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řady je její **bodová konvergence**.

Jestliže řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje (lokálně) stejnoměrně na množině M, pak číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje pro každé $x \in M$, tj. řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje bodově na množině M.

P ř í k l a d Řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ nekonverguje stejnoměrně na $[0,1]$, neboť po dosazení $x = 1$ řada diverguje.

Poznámka. Vyšetřování bodové konvergence řad funkcí je vlastně zkoumáním konvergence číselné řady s parametrem. Proto se v případě potřeby budeme na řadu funkcí dívat jako na řadu s parametrem. A mluvíme-li o konvergenci řady funkcí na množině, myslíme samozřejmě bodovou konvergenci.

§85. To, že řada nekonverguje stejnoměrně, lze někdy dokázat s použitím následující **nutné podmínky pro stejnoměrnou konvergenci**.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje (lokálně) stejnoměrně na množině* M*, pak funkce* $a_n(x)$ *na* M *konvergují (lokálně) stejnoměrně k* 0*.*

P ř í k l a d Konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ stejnoměrně na intervalu $(0,1)$?

Řešení. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce x^n na $(0,1)$ rostoucí a v bodě 1 zleva má limitu 1, je tedy $\sup_{x\in(0,1)} x^n = 1$. Proto funkce x^n nekonvergují k 0 stejnoměrně na $(0,1)$. Tudíž naše řada nekonverguje stejnoměrně. ■

Stejným způsobem lze ukázat, že řada z předchozího příkladu nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu tvaru $(1-\varepsilon, 1)$ pro $\varepsilon \in (0,1)$.

§86. Někdy může být užitečný následující triviální postřeh.

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *je řada funkcí na množině* M *a* $n_0 \in \mathbb{N}$*. Pak řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje (lokálně) stejnoměrně na* M*, právě když (lokálně) stejnoměrně na* M *konverguje řada* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n(x)$*.*

Tento postřeh sám o sobě příliš aplikací nemá, jeho důležitost spočívá v kombinaci s jinými kritérii. Často totiž stačí, aby předpoklady kritéria byly splněny „od jistého n_0 počínaje“.

§87. Jednoduchou postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řad je **Weierstrassovo kritérium**.

Jestliže (číselná) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje a pro každé* $x \in M$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $|a_n(x)| \le b_n$*, pak* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konverguje stejnoměrně na* M*.*

P ř í k l a d Zkoumejte stejnoměrnou konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$ na $[0,+\infty)$.

Řešení. Označme $a_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{n^4+x^2}$. Funkce a_n je spojitá a nezáporná na $[0,+\infty)$.

Nalezněme její maximum.

Pro $x \in (0,\infty)$ je $a_n'(x) = \frac{n(n^4-3x^2)}{2\sqrt{x}(n^4+x^2)^2}$, a tedy funkce a_n je rostoucí na $[0, n^2/\sqrt{3}]$ a klesající na $[n^2/\sqrt{3}, +\infty)$. Maximum má tedy v bodě $x_n = n^2/\sqrt{3}$. Dosazením zjistíme, že $a_n(x_n) = \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ konverguje (viz §45), konverguje naše řada stejnoměrně na $[0,+\infty)$ podle Weierstrassova kritéria. Je totiž $|a_n(x)| = a_n(x) \le \frac{\sqrt[4]{27}}{4n^2}$ pro každé $x \in [0,\infty)$. ■

<u>Příklad</u> Na kterých intervalech je stejnoměrně konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$? Určete maximální intervaly, na kterých řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Řešení. Nejprve vyšetřeme bodovou konvergenci. Dle §39 řada konverguje, právě když $x \in (-1,1)$. Z příkladu v §85 už víme, že nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu tvaru $(1-\varepsilon, 1)$. Stejně lze ukázat, že nekonverguje stejnoměrně na intervalech $(-1,-1+\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$, protože ani na těchto intervalech posloupnost funkcí x^n nekonverguje stejnoměrně k 0.

Dále uvažujme interval $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ pro $\varepsilon \in (0,1)$. Je-li x z tohoto intervalu, pak $|x^n| \le (1-\varepsilon)^n$. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\varepsilon)^n$ konverguje, podle Weierstrassova kritéria naše řada konverguje stejnoměrně na $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Shrňme výsledky: Maximální množinou, kde řada konverguje bodově, je $(-1,1)$; řada konverguje stejnoměrně na $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ pro každé $\varepsilon \in (0,1)$, konvergence není stejnoměrná na $(1-\varepsilon, 1)$ ani na $(-1,-1+\varepsilon)$ pro žádné $\varepsilon > 0$. Protože podle předchozí věty pro každé $x \in (-1,1)$ řada konverguje stejnoměrně na nějakém okolí x, řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1,1)$. ■

<u>Příklad</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}$?

Řešení. Všechny členy řady mají smysl pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na podmnožinách této množiny je její konvergence (bodová, stejnoměrná, lokálně stejnoměrná) ekvivalentní příslušnému typu konvergence řady $\sum_{n=8}^{\infty} x^{n-7}$, což je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Z předchozího příkladu a §86 plyne, že řada konverguje stejnoměrně na intervalech $[-1+\varepsilon, 0)$ a $(0, 1-\varepsilon]$ pro každé $\varepsilon \in (0,1)$, nikoli však na $(-1,-1+\varepsilon)$ nebo na $(1-\varepsilon, 1)$. ■

Weierstrassovo kritérium je postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci, nikoli však podmínkou nutnou. A to ani pro řady s nezápornými členy. O tom svědčí i předchozí příklad – tam uvedená řada konverguje stejnoměrně například na $(0, 1/2)$. Nicméně prvních šest členů této řady tvoří funkce, které na $(0, 1/2)$ nejsou omezené, a tudíž předpoklady Weierstrassova kritéria nemohou být splněny. Weierstrassovo kritérium lze ovšem použít na řadu $\sum_{n=8}^{\infty} x^{n-7}$, což bylo uděláno v předminulém příkladě. Následující příklad ukazuje, že Weierstrassovo kritérium není nutnou podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci ani v kombinaci s §86.

<u>P ř í k l a d</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, kde

$$a_1(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x \in (0,\pi), \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus (0,\pi); \end{cases}$$
$$a_n(x) = \frac{1}{n} a_1(x-(n-1)\pi) \text{ pro } x \in \mathbb{R} \text{ a } n \geq 2 \text{ ?}$$

Řešení. Řada zřejmě konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, protože $a_n(x)$ je nenulové nejvýše pro jedno $n \in \mathbb{N}$. Přitom $a_n(x) \geq 0$ a $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} a_n(x) = \frac{1}{n}$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, Weierstrassovo kritérium tedy použít nelze.

Nicméně, označíme-li $s(x)$ součet a $s_n(x)$ n-tý částečný součet naší řady, platí $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |s(x) - s_n(x)| = \frac{1}{n+1}$, řada tedy konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. ■

§88. Ekvivalentní podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci řady je **Bolzano-Cauchyova podmínka**.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in M) \left(\left| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k}(x) \right| < \varepsilon \right).$$

<u>P ř í k l a d</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4+x^2}$?

Řešení. Z limitního srovnávacího kritéria plyne (viz §43), že naše řada je (absolutně) konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Označme $a_n(x) = \frac{nx}{n^4+x^2}$ a zkusme opět najít maximum funkce $|a_n(x)|$.

Pro $x \in \mathbb{R}$ je $a_n'(x) = \frac{n(n^4-x^2)}{(n^4+x^2)^2}$. Proto je funkce a_n klesající na $(-\infty, -n^2]$, rostoucí na $[-n^2, n^2]$ a klesající na $[n^2, \infty)$. Protože limita funkce a_n v $-\infty$ i v $+\infty$ je rovna 0, je v bodě $-n^2$ minimum a v bodě n^2 maximum. Je tedy $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |a_n(x)| = a_n(n^2) = 1/2n$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/2n$ je však divergentní, a tak nelze použít Weierstrassovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci na $\mathbb{R}$.

Když si však uvědomíme, co jsme zjistili o monotonii funkcí a_n, vidíme, že z Weierstrassova kritéria plyne stejnoměrná konvergence naší řady na intervalu $[-T, T]$ pro každé $T \in (0, \infty)$. Zdůvodněme to podrobně:

Je-li $x \in [-T, T]$ a $n > \sqrt{T}$, pak $|a_n(x)| \le a_n(T)$. Přitom řada $\sum\limits_{n>\sqrt{T}} a_n(T)$ konverguje (řada ze zadání konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy i pro T). Proto řada $\sum\limits_{n>\sqrt{T}} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na $[-T, T]$ dle Weierstrassova kritéria. Dle §86 na tomto intervalu konverguje stejnoměrně i řada ze zadání.

To, že řada nekonverguje stejnoměrně na (T, ∞) pro žádné $T \in \mathbb{R}$ dokážeme pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky. Je totiž

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n+k}(n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)n^2}{(n+k)^4 + n^4} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{2(n+k)^3} \ge n \cdot \frac{n^2}{2(n+n)^3} = 1/16.$$

Zvolme tedy $\varepsilon = 1/16$. Je-li $n_0 \in \mathbb{N}$, vezměme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \ge n_0$ a $n^2 > T$, dále položme $p = n$ a $x = n^2$. Pak uvedený výpočet ukazuje, že není splněna Bolzano-Cauchyho podmínka, konvergence tedy není na (T, ∞) stejnoměrná. Podobně, nebo s využitím faktu, že funkce a_n jsou liché, vidíme, že řada nekonverguje stejnoměrně na $(-\infty, T)$ pro žádné $T \in \mathbb{R}$.

Shrňme výsledky: Řada konverguje bodově na $\mathbb{R}$, stejnoměrně na každém omezeném intervalu, na žádném neomezeném intervalu konvergence stejnoměrná není. ■

§89. Jednou z postačujících podmínek pro stejnoměrnou konvergenci ne nutně absolutně konvergentních řad je **Dirichletovo kritérium**.

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M, jestliže jsou splněny následující podmínky:

(i) Částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ jsou stejně omezené na M (tj. existuje takové $K \in \mathbb{R}$, že pro každé $x \in M$ a $N \in \mathbb{N}$ je $|\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)| \le K$).

(ii) Posloupnost $\{b_n(x)\}$ je monotónní pro každé $x \in \mathbb{R}$ a stejnoměrně konverguje k 0.

<u>P ř í k l a d</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \ ?$$

Řešení. Pro $x = 0$ řada konverguje absolutně, pro $x \ne 0$ zřejmě konverguje podle Leibnizova kritéria (že konvergence není absolutní lze zjistit například srovnáním s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pomocí limitního srovnávacího kritéria).

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má částečné součty omezené číslem 1 (čímž myslíme, že absolutní hodnota každého částečného součtu je nejvýš 1, konzistentně s terminologií použitou ve znění kritéria). Jde o řadu konstantních funkcí, a tak jsou částečné součty stejně omezené na $\mathbb{R}$. Posloupnost $\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$ je monotónní pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce $\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$ je lichá a rostoucí na $\mathbb{R}$, a tak na pro $x \in [-R, R]$ platí $|\operatorname{arctg}\frac{x}{n}| \le \operatorname{arctg}\frac{R}{N}$, a tedy $\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$ konverguje stejnoměrně k 0 na $[-R, R]$. Protože $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n} = \frac{\pi}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, nekonverguje posloupnost $\operatorname{arctg}\frac{x}{n}$ stejnoměrně k 0 na žádném (R, ∞) ani na $(-\infty, R)$. Podle §85 na těchto intervalech řada nekonverguje stejnoměrně.

Shrňme výsledky: Řada konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu (a tedy lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$), nikoli však na neomezených intervalech. ∎

Uvedená kritéria platí i pro komplexní řady (tj. pro řady, jejichž členy jsou komplexní funkce komplexní proměnné; přičemž požadavek monotonie určité posloupnosti v sobě zahrnuje požadavek, aby šlo o posloupnost reálných čísel). Pro aplikaci Dirichletova kritéria se občas hodí následující postřeh, o jehož platnosti se lze snadno přesvědčit s využitím vzorce pro částečný součet geometrické řady.

Je-li $z \in \mathbb{C}$, $|z| \le 1$ a $z \ne 1$, pak částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ jsou omezené číslem $\frac{2}{|1-z|}$.

Poznámka. Říkáme-li, že posloupnost (reálných či komplexních) čísel $\{a_n\}$ je omezená číslem K, míníme tím, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \le K$; tedy, že posloupnost absolutních hodnot čísel a_n je shora omezená číslem K.

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci (absolutní, neabsolutní, stejnoměrnou) řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ na podmnožinách $\mathbb{C}$.

Řešení. Nejprve vyšetřeme bodovou konvergenci. Je-li $|z| < 1$, pak řada konverguje absolutně (použijeme třeba Cauchyovo odmocninové kritérium z §44 nebo rovnou srovnáme s geometrickou řadou). Je-li $|z| > 1$, řada diverguje, protože nesplňuje nutnou podmínku konvergence (viz §40). Pro $z = 1$ řada diverguje (jde o řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$), pro $z \ne 1$ takové, že $|z| = 1$ řada konverguje podle Dirichletova kritéria z §48 s použitím výše uvedeného postřehu.

Řada tedy konverguje, právě když $|z| \le 1$ a $z \ne 1$; konverguje absolutně právě pro $|z| < 1$ (je-li $|z| = 1$, pak řada absolutních hodnot je $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, a tedy diverguje).

Vyšetřeme dále stejnoměrnou konvergenci. Zkusme použít Dirichletovo kritérium. Posloupnost $1/n$ je klesající a má limitu 0. Protože je to číselná posloupnost (přesněji posloupnost konstantních funkcí), je konvergence stejnoměrná na libovolné množině. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ má částečné součty omezené číslem $\frac{2}{|1-z|}$. Vidíme tedy, že jsou stejně omezené na množině tvaru $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \le 1, |z-1| \ge \varepsilon\}$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Na množinách tohoto tvaru je tedy konvergence stejnoměrná.

Dále ukažme, že konvergence není stejnoměrná na žádné množině, jejíž uzávěr obsahuje bod 1. Vezměme tedy libovolnou posloupnost $z_m \in \mathbb{C}$ splňující $|z_m| \leq 1$, $z_m \neq 1$, $z_m \to 1$, a dokažme, že řada nekonverguje stejnoměrně na množině $M = \{z_m : m \in \mathbb{N}\}$. Nejprve si uvědomme, že řada konverguje stejnoměrně, právě když stejnoměrně konverguje řada reálných částí i řada imaginárních částí. Ukážeme, že konvergence řady reálných částí není stejnoměrná. Každé z_m lze psát ve tvaru $z_m = r_m(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m)$, kde $r_m \in [0,1]$ a $\alpha_m \in (-\pi,\pi]$. Z toho, že platí $z_m \to 1$, plyne $r_m \to 1$ a $\alpha_m \to 0$. Řada reálných částí má tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} r_m^n \cos n\alpha_m$. K vyvrácení stejnoměrné konvergence použijeme Bolzano-Cauchyho podmínku z §88. Pokud totiž $|\alpha_m| < \frac{\pi}{4n}$, je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} r_m^{n+k} \cos((n+k)\alpha_m) \geq r_m^{2n} \cos(2n\alpha_m) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geq$$
$$\geq r_m^{2n} \cos(2n\alpha_m) \cdot n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} r_m^{2n} \cos(2n\alpha_m).$$

Zvolme tedy například $\varepsilon = \frac{1}{8}$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je libovolné, položme $p = n = n_0$. Protože $r^m \to 1$ a $\alpha_m \to 0$, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $r_m^{2n} > \frac{1}{2}$ a $2n|\alpha_m| < \frac{\pi}{3}$. Pak předchozí výpočet ukazuje, že $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} r_m^{n+k} \cos((n+k)\alpha_m) > \frac{1}{8} = \varepsilon$. To ukazuje, že není splněna Bolzano-Cauchyho podmínka, a tudíž řada nekonverguje stejnoměrně na M.

Shrnutí: Řada konverguje stejnoměrně na množině $A \subset \mathbb{C}$, právě když platí inkluze $\overline{A} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, z \neq 1\}$.

Zamysleme se ještě, kde konverguje stejnoměrně řada absolutních hodnot, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n}$. Z Weierstrassova kritéria z §87 snadno plyne, že konverguje stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ pro každé $r < 1$. Z výše uvedeného výpočtu plyne, že nekonverguje stejnoměrně na žádné posloupnosti $\{z_m\}$ splňující $|z_m| \to 1$. Proto řada absolutních hodnot konverguje stejnoměrně na $A \subset \mathbb{C}$, právě když $\overline{A} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. ■

Všimněte si, že například na množině $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z < 0\}$ řada z předchozího příkladu konverguje absolutně a stejnoměrně, zatímco řada absolutních hodnot nekonverguje stejnoměrně.

Poznamenejme, že to, že řada z předchozího příkladu nekonverguje stejnoměrně na žádné množině obsahující v uzávěru bod 1, lze ukázat mnohem jednodušeji například s využitím Moore-Osgoodovy věty z §81. Ukážeme si to později v §91. Zde jsme dali přednost další ilustraci Bolzano-Cauchyovy podmínky.

Podobně jako výše uvedený postřeh o částečných součtech geometrické řady se často hodí odhad pro částečné součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ uvedený v §48.

<u>Příklad</u> Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ na podintervalech $[0, \pi]$.

Řešení. Z odhadu v §48 plyne, že pro každé $\delta \in (0, \pi)$ a $x \in [\delta, \pi]$ jsou částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ omezené číslem $\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$. Tudíž podle Dirichletova kritéria řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[\delta, \pi]$.

V bodě 0 řada konverguje rovněž, je totiž nulová. Nicméně, nekonverguje stejnoměrně na žádném intervalu $[0, \delta)$. To ověříme opět pomocí Bolzano-Cauchyovy podmínky. Uvažujme $x_k = \frac{\pi}{4k}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$\sum_{n=k}^{2k} \frac{\sin nx_k}{n} = \sum_{n=k}^{2k} \frac{\sin n\frac{\pi}{4k}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=k}^{2k} \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Protože $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, je $x_k \in [0, \delta)$ pro dostatečně velká k. Není tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka. (Rozmyslete si podrobně.) ■

§90. Další postačující podmínkou pro stejnoměrnou konvergenci je **Abelovo kritérium**.

Nechť řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M a posloupnost $b_n(x)$ je monotónní pro každé $x \in M$ a je stejně omezená na M (tj. existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ a $n \in \mathbb{N}$ je $|b_n(x)| \leq K$). Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M.

<u>Příklad</u> Na kterých intervalech konverguje stejnoměrně řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{4x - x^2 - 1}{3x^2 + 3} \right)^n \frac{nx^3}{n + x^2} \ ?$$

Řešení. Posloupnost $\frac{1}{n}$ je klesající a má limitu 0 (stejnoměrně na $\mathbb{R}$, protože je to „číselná posloupnost“). Výraz $\frac{4x-x^2-1}{3x^2+3}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ v intervalu $[-1, \frac{1}{3}]$ (ověření přenecháme čtenáři), a tedy částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{4x-x^2-1}{3x^2+3})^n$ jsou omezené číslem $\frac{2}{1-1/3} = 3$ (podle postřehu v §89). Proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{4x-x^2-1}{3x^2+3})^n$ konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$ podle Dirichletova kritéria z §89.

Zkoumejme nyní posloupnost $\frac{nx^3}{n+x^2} = \frac{x^3}{1+x^2/n}$. Pro $x \geq 0$ je zřejmě neklesající, pro $x \leq 0$ je nerostoucí. Navíc je omezená číslem $|x|^3$ (ve smyslu poznámky z §89 – tímto číslem je shora omezená posloupnost absolutních hodnot). Proto řada, podle

Abelova kritéria, konverguje stejnoměrně na každém omezeném intervalu. (Zdůvodněme si to podrobněji: nechť $R > 0$ a $x \in [-R, R]$. Pak $\left|\frac{nx^3}{n+x^2}\right| \le |x^3| \le R^3$, a tedy posloupnost $\frac{nx^3}{n+x^2}$ je stejně omezená na intervalu $[-R, R]$. Proto na tomto intervalu můžeme použít Abelovo kritérium.)

Že řada nekonverguje stejnoměrně na žádném okolí $+\infty$ nebo $-\infty$ plyne z toho, že na takových množinách není splněna nutná podmínka konvergence z §85. Je totiž

$$\lim_{x\to\infty} |\tfrac{1}{n}(\tfrac{4x-x^2-1}{3x^2+3})^n \tfrac{nx^3}{n+x^2}| = |\tfrac{1}{n} \cdot (-1/3)^n \cdot (+\infty)| = +\infty,$$

podobně pro $x \to -\infty$. ■

§91. K vyvrácení stejnoměrnosti konvergence řady funkcí lze někdy použít i nutné podmínky pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí (viz §81-§83) aplikované na posloupnost částečných součtů. Ilustrujme si to dvěma alternativními způsoby řešení části posledního příkladu z §89.

<u>Příklad</u> Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ není stejnoměrně konvergentní na žádné množině $M \subset \mathbb{C}$, pro kterou platí $1 \in \overline{M}$.

Řešení. Buď $M \subset \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le 1, z \ne 1\}$ splňující $1 \in \overline{M}$. (Množina napravo je oborem bodové konvergence, jak jsme se přesvědčili v zmíněném příkladu v §89.)

První způsob. Označme $s_n(z)$ n-tý částečný součet naší řady v bodě z. Pak funkce s_n je spojitá na $\mathbb{C}$, a tedy omezená na kompaktní množině $\overline{M}$. Proto je omezená i na M. Jestliže posloupnost $s_n(x)$ konverguje k funkci $s(x)$ stejnoměrně na M, je funkce $s(x)$ na M omezená podle §82. Z definice stejnoměrné konvergence plyne, že posloupnost $s_n(x)$ je stejně omezená na M. Protože s_n je spojitá funkce pro každé n, je posloupnost funkcí $s_n(x)$ stejně omezená i na $\overline{M}$. Nicméně $1 \in \overline{M}$ a $s_n(1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(1) = \infty$. To je spor, proto posloupnost $s_n(x)$ nekonverguje na M stejnoměrně.

Druhý způsob. Využijeme Moore-Osgoodovu větu z §81. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\lim\limits_{z\to 1} \frac{z^n}{n} = \frac{1}{n}$. Proto, kdyby řada konvergovala na M stejnoměrně, pak by konvergovala i řada limit, tj. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ta ovšem diverguje, proto konvergence na M není stejnoměrná. ■

§92. Na jednom příkladu si předvedeme použití Weierstrassova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí f_n v případě, kdy výpočet maxim ani suprem funkcí $|f_n|$ se pro to nehodí. S podobným problémem jsme se setkali již v závěru §80. Zároveň užijeme Moore-Osgoodovu větu pro případ řady funkcí.

P ř í k l a d   Funkce f je definována předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\log x) \cdot \log\left(1 + \frac{x}{n^2}\right).$$

Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x)$.

Řešení. Označme $f_n(x) = (\log x)\cdot\log(1+\frac{x}{n^2})$. K tomu, abychom mohli užít Moore-Osgoodovu větu o záměně limit, potřebujeme, aby řada funkcí f_n konvergovala stejnoměrně na nějakém pravém okolí nuly.

Pro funkci f_n platí odhad $|f_n(x)| \le |\log x| \cdot \frac{x}{n^2}$, je-li $x > 0$, protože vyšetřením průběhu funkce $\log(1 + y)$ se můžeme snadno přesvědčit, že $\log(1 + y) \le y$ pro $y \ge 0$. Funkce $|x \log x|$ je omezená na intervalu $(0, 1]$ nějakou konstantou a shora, neboť ji lze dodefinovat v nule tak, aby byla spojitá na uzavřeném intervalu $[0, 1]$. Platí tedy, že $|f_n(x)| \le \frac{a}{n^2}$. Protože číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2}$ konverguje, konverguje řada funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně na intervalu $(0, 1)$, což je pravé okolí nuly, podle Weierstrassova kritéria. Z Moore-Osgoodovy věty plyne, že

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0_+} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

■

§**93.** V následující kapitole si ukážeme na příkladu mocninných řad, jak lze vět o záměně sumy a derivování či integrování užít pro sečtení některých řad. Tady si na jednom příkladu ukážeme, jak lze díky větě o záměně sumy a integrálu a v předchozím vyložených kritérií stejnoměrné konvergence počítat některé určité integrály, aniž počítáme, dokonce aniž umíme spočítat, primitivní funkci.

Pokud spojité funkce f_n konvergují stejnoměrně k f na omezeném intervalu (a, b) a existují integrály $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Analogické tvrzení platí pro řady funkcí.

P ř í k l a d   Spočtěte integrál $\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Pro $x \in (0, 1)$ platí, že $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, a tedy

$$\frac{\log x}{1 + x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \log x.$$

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ má stejně omezené částečné součty (jako řada konstantních funkcí na $(0,1)$). Posloupnost $x^n \log x$ je monotónní pro každé $x \in (0,1)$ a konečně posloupnost funkcí $x^n \log x$ konverguje stejnoměrně k nule na $(0,1)$, neboť funkce $|x^n \log x|$ pro $n > 0$ nabývá v bodě $e^{-1/n}$ maximální hodnotu $\frac{1}{ne}$ (o tom se snadno přesvědčíte vyšetřováním průběhu této funkce pomocí derivace a toho, že limity v krajních bodech jsou nulové) a tyto hodnoty konvergují k nule pro n blížící se nekonečnu. Z Dirichletova kritéria pro stejnoměrnou konvergenci máme, že naše řada konverguje stejnoměrně na intervalu $(0,1)$.

Spočítáme

$$\int_0^1 x^n \log x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = -\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Proto dostáváme, že

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2},$$

což je řada se součtem $-\frac{\pi^2}{12}$. (Poslední fakt plyne z toho, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (o tom se přesvědčíme v poslední kapitole o Fourierových řadách v několika příkladech) díky tomu, že

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\tfrac{1}{(n+1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{(2n)^2} = -\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^2} = -\tfrac{\pi^2}{12}.\Big)$$

■

14. Mocninné řady

Mocninná řada o středu $z_0 \in \mathbb{C}$ je řada (komplexních funkcí komplexní proměnné) tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, kde $a_n \in \mathbb{C}$ jsou koeficienty. My se budeme zabývat pouze řadami o středu 0 s reálnými koeficienty. (Uvědomte si, že tímto omezením na obecnosti neztrácíme – místo řady s komplexními koeficienty můžeme vyšetřovat dvě řady s reálnými koeficienty.)

Budeme se zabývat jednak vyšetřováním konvergence těchto řad, a pak rozvíjením funkcí v mocninné řady a sčítáním mocninných řad.

§94. Prvním krokem při vyšetřování konvergence mocninných řad je určení **poloměru konvergence**, a tím i **kruhu konvergence**. Následující tvrzení je důsledkem Cauchyova odmocninového kritéria (viz §44).

Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *je mocninná řada. Existuje takové* $R \in [0, +\infty]$ *(tzv. poloměr konvergence), že na množině* $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\}$ *(tzv. kruh konvergence) řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně, zatímco v bodech* $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$, *řada diverguje. Poloměr konvergence lze spočítat podle vzorce* $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ *(je-li ve jmenovateli* 0, *je* $R = +\infty$*).*

Poznamenejme, že i v případě $R = 0$ řada konverguje pro $z = 0$.

Připomeňme, že existuje-li limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, rovná se $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

<u>P ř í k l a d</u> Určete poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^7 z^n}{n+20}$.

Řešení. Položíme $a_n = \frac{n^7}{n+20}$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, poloměr konvergence je tedy 1. ■

<u>P ř í k l a d</u> Určete poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{7^n}$.

Řešení. Jest $a_n = \begin{cases} 1/7^k & \text{pro } n = k^2, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$. Proto

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k^2]{1/7^k} = \lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{7} = 1,$$

poloměr konvergence je tudíž 1. ■

Někdy se hodí místo výše uvedeného vzorce pro výpočet poloměru konvergence použít následující tvrzení, které je důsledkem podílového kritéria z §44.

Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *je mocninná řada. Existuje-li limita* $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *pak* $R = 1/L$ *(*$R = +\infty$, *je-li* $L = 0$*) je poloměr konvergence řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

<u>P ř í k l a d</u> Určete poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n! \cdot (2n)!}{(3n+20)!} z^n$.

Řešení. Jest $a_n = \frac{n! \cdot (2n)!}{(3n+20)!}$. Počítejme

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot (2(n+1))!}{(3(n+1)+20)!} \cdot \frac{(3n+20)!}{n! \cdot (2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+23)(3n+22)(3n+21)} = \frac{4}{27},$$

poloměr konvergence je tedy $27/4$. ■

§95. Další úlohou je vyšetření **konvergence na kružnici**, která je hranicí kruhu konvergence. Přitom je možné využít všechna kritéria z oddílů 6 a 13 pro bodovou, případně stejnoměrnou konvergenci. Ukážeme si několik příkladů ilustrujících různé možnosti, jeden takový – pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ – jsme vyřešili v §89.

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$.

Řešení. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$, je poloměr konvergence roven 1. Je-li $|z| = 1$, pak posloupnost $n^2 z^n$ nemá limitu 0, a tedy řada diverguje podle §40. Řada tedy konverguje (a to absolutně), právě když $|z| < 1$. ■

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Řešení. Jest $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1$, poloměr konvergence je tedy roven 1. Pro $|z| = 1$ je $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$. Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, a tedy naše řada konverguje absolutně pro každé z splňující $|z| = 1$.

Z Weierstrassova kritéria z §87 plyne, že řada absolutních hodnot konverguje stejnoměrně na množině $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$, speciálně naše řada na této množině konverguje absolutně a stejnoměrně. ■

§96. Při rozvíjení funkcí v mocninnou řadu, případně při sčítání mocninných řad lze využít **základních aritmetických operací** a zásoby **známých funkcí**, jejichž vyjádření mocninnou řadou známe. Sem patří funkce e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ a speciálně součet geometrické řady.

P ř í k l a d Sečtěte na kruhu konvergence řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+7}}{n!}$.

Řešení. Nejprve řadu upravíme: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+7}}{n!} = z^7 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z^3)^n}{n!}$. Víme, že $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ na celém $\mathbb{C}$, a tedy součet naší řady je $z^7 e^{z^3}$ na celém $\mathbb{C}$. ■

P ř í k l a d Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$.

Řešení. Jest

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}(1+(-1)^n)}{(2n)!} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos z + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+(-1)^n) z^n}{n!}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos z + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\right)\right) = \frac{1}{2}(\cos z + \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}))
\end{aligned}$$

na $\mathbb{C}$. ■

Poznamenejme, že funkce $\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ se značí $\cosh z$. Pokud známe vyjádření funkce $\cosh z$ mocninnou řadou, vyřešíme předchozí příklad rychleji.

Užitečným nástrojem je věta o jednoznačnosti pro mocninné řady.

Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ jsou dvě mocninné řady, které pro všechna z z nějaké nekonečné kompaktní podmnožiny průniku jejich kruhů konvergence mají týž součet. Pak $a_n = b_n$ pro všechna $n = 0, 1, 2, \ldots$

<u>Příklad</u> Vyjádřete (na maximální množině) mocninou řadou o středu 0 funkci $\frac{z}{1+z^3}$.

Řešení. Víme, že pro $|q| < 1$ platí $\frac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Proto pro $|z| < 1$ platí $\frac{z}{1+z^3} = z \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-z^3)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{3n+1}$.

Tím jsme vyjádřili funkci ze zadání mocninnou řadou na kruhu $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Výsledná řada má poloměr konvergence 1 a na kružnici diverguje. Z uvedené věty o jednoznačnosti plyne, že nalezené vyjádření je jediné a zmíněný kruh je hledanou maximální množinou. ■

<u>Příklad</u> Vyjádřete (na maximálním intervalu) mocninou řadou o středu 0 funkci $\sin^2 x$.

Řešení. Je $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Přitom $\cos 2x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$ na $\mathbb{R}$, tedy

$$\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

■

§97. Při sčítání mocninných řad někdy může pomoci skutečnost, že na kruhu konvergence konvergují absolutně, a tudíž je lze jakkoli přerovnat a uzávorkovat, aniž by se změnil součet.

<u>Příklad</u> Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n$ všude, kde konverguje.

Řešení. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, je poloměr konvergence roven 1. Je-li $|z| = 1$, pak není splněna nutná podmínka konvergence z §40, a tedy řada diverguje. Proto řada konverguje, právě když $|z| < 1$. Pro taková z je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} z^n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=k}^{\infty} z^n =$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1-z} = \frac{z}{(1-z)^2}$. Uvědomte si, že jsme použili faktu, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |z^n| \right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |nz^n|$ konverguje. ■

§98. Díky tomu, že mocninné řady konvergují lokálně stejnoměrně na kruhu konvergence, lze je **derivovat a integrovat člen po členu**, přičemž zderivovaná či zintegrovaná řada má stejný poloměr konvergence (poslední tvrzení snadno plynou ze vzorce pro výpočet poloměru konvergence). V těchto případech se obvykle omezujeme na tyto řady v reálném oboru, pak mluvíme o intervalu konvergence namísto kruhu konvergence. (Nicméně lze pracovat i v komplexním oboru, s použitím pojmu derivace podle komplexní proměnné a primitivní funkce k funkci komplexní proměnné.)

(i) *Nechť* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *na intervalu (kruhu) konvergence. Pak na této množině platí* $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. *Navíc poloměr konvergence řady pro* f' *je roven poloměru konvergence řady pro* f.

(ii) *Nechť* $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *na intervalu (kruhu) konvergence. Pak na této množině platí* $f(z) = f(0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$. *Navíc poloměr konvergence řady pro* f *je roven poloměru konvergence řady pro* f'.

Příklad Na maximálním otevřeném intervalu vyjádřete funkci $\operatorname{arctg} x$ jako součet mocninné řady se středem 0.

Řešení. Jest $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Přitom

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

na $(-1, 1)$. Protože $\operatorname{arctg} 0 = 0$, dostáváme

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

na $(-1, 1)$. Interval $(-1, 1)$ je maximální díky větě o jednoznačnosti zformulované v §96, protože je intervalem konvergence nalezené řady. ■

Příklad Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ na intervalu konvergence.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že poloměr konvergence je 1. Označme symbolem $f(x)$ součet řady na $(-1,1)$. Pak $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}$, tedy $x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, a tudíž $(x^2 f'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. Primitivní funkcí k funkci $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$ na intervalu $(-1,1)$ je například funkce $-x - \log(1-x)$, a tedy existuje $c \in \mathbb{R}$, že $x^2 f'(x) = -x - \log(1-x) + c$ na $(-1,1)$. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $c = 0$. Proto $f'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\log(1-x)}{x^2}$ na $(-1,0) \cup (0,1)$. Spočtěme primitivní funkci k pravé straně

$$\begin{aligned}
\int \left(-\frac{1}{x} - \frac{\log(1-x)}{x^2}\right) \mathrm{d}x &= -\log|x| + \frac{\log(1-x)}{x} + \int \frac{1}{x(1-x)} \,\mathrm{d}x = \\
&= -\log|x| + \frac{\log(1-x)}{x} + \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}) \,\mathrm{d}x = \\
&= -\log|x| + \frac{\log(1-x)}{x} + \log|x| - \log(1-x) + \mathbf{C} = \\
&= \frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x) + \mathbf{C}
\end{aligned}$$

na $(-1,0)$ a na $(0,1)$. Protože $f(0) = 0$ a funkce $\frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x)$ má v 0 limitu -1, je

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x) & \text{pro } x \in (-1,0) \cup (0,1), \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

■

Poznámka. Mohli jsme ovšem postupovat takto:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \\
&= \log(1-x) - \frac{1}{x}\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) = \log(1-x) - \frac{1}{x}(\log(1-x) - x),
\end{aligned}$$

pokud $|x| < 1$. Užili jsme rozvoj logaritmu v Taylorovu řadu, který si buď pamatujeme, nebo jej můžeme odvodit pomocí záměny sumy a první derivace. Tuto záměnu si zkuste provést sami.

<u>P ř í k l a d</u> Sečtěte řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

Řešení. Poloměr konvergence je 1 a na $(-1,1)$ platí

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^n\right)' = x \left(x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)' = \\
&= x \left(x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'\right)' = x \left(x \left(\frac{x}{1-x}\right)'\right)' = x \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

V bodech $x = 1$ a $x = -1$ řada diverguje. ■

§99. Jednoduchým pravidlem pro součet mocninné řady v hraničních bodech kruhu konvergence je následující postřeh:

Nechť mocninná řada s poloměrem konvergence R konverguje absolutně v bodě R. Pak řada konverguje stejnoměrně na množině $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le R\}$ a její součet je na této množině spojitá funkce.

<u>P ř í k l a d</u> Najděte součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ v bodech $x = 1$ a $x = -1$.

Řešení. V jednom z příkladů v §98 jsme ukázali, že součet této řady je na množině $(-1,0) \cup (0,1)$ roven $1 + \frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x)$. Protože v bodě 1 řada konverguje absolutně, je její součet spojitý na $[-1,1]$ (dokonce na $\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le 1\}$). Proto součet pro $x = -1$ je roven $1 - 2\log 2$ a součet pro $x = 1$ je roven 1 (protože funkce $\frac{\log(1-x)}{x} - \log(1-x) = \frac{(1-x)\log(1-x)}{x}$ má v bodě 1 zleva limitu 0). ■

§100. V případě, že konvergence na hranici není absolutní, může pomoci **Abelova věta**.

Nechť $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je mocninná řada, R poloměr konvergence, $f(z)$ její součet na kruhu konvergence a z_0 je komplexní číslo splňující $|z_0| = R$. Jestliže $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konverguje, pak existuje limita $\lim\limits_{t\to 1-} f(tz_0)$ a rovná se součtu uvedené řady.

<u>P ř í k l a d</u> Sečtěte řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Řešení. Řada konverguje podle Leibnizova kritéria a vznikne dosazením $x = 1$ do mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Tato řada má poloměr konvergence roven 1 a na $(-1,1)$ je její součet roven $\operatorname{arctg} x - x$, jak víme z prvního příkladu v §98. Podle Abelovy věty je součet naší řady roven $\lim\limits_{x\to 1-} (\operatorname{arctg} x - x) = \operatorname{arctg} 1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1$. ■

Poznamenejme, že obrácení Abelovy věty neplatí, totiž uvedená limita může existovat, aniž by příslušná řada konvergovala, o čemž svědčí například geometrická řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ a $z_0 = -1$.

15. Fourierovy řady

§101. Uvedeme zde několik příkladů k úvodu do teorie klasických Fourierových řad. Především si připomeňme, že pro $2l$-periodickou reálnou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je lebesgueovsky integrovatelná[5] na omezených intervalech (množinu takových funkcí označujeme $\mathcal{P}(2l)$), se jejími Fourierovými koeficienty rozumí čísla

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(nx\frac{\pi}{l}\right)\,\mathrm{d}x,\ \ n = 0, 1, \ldots,$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(nx\frac{\pi}{l}\right)\,\mathrm{d}x,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

Fourierovou řadou funkce $f \in \mathcal{P}(2l)$ je pak řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(nx\frac{\pi}{l}\right) + b_n\sin\left(nx\frac{\pi}{l}\right)\right)$$

bez ohledu na to zda a v jakém smyslu konverguje nebo ne. (Jde o speciální případ tzv. trigonometrických řad, které mají stejný tvar, ale koeficienty a_n a b_n nemusejí souviset s žádnou funkcí f.) Následující příklady se budou zabývat především tím, kdy řada konverguje bodově či stejnoměrně k funkci f. Určitě znáte z přednášky nějaké postačující podmínky, které to zaručují. My zde uvedeme poměrně silné postačující podmínky, které nám v následujícím textu, ale i pro většinu obvyklých příkladů, postačí pro řešení.

Nechť $f \in \mathcal{P}(2l)$ je po částech hladká v tom smyslu, že v intervalu $[-l, l]$ najdeme konečně mnoho bodů $\{x_1, \ldots, x_k\}$ tak, že f' je spojitá mimo tyto body a v x_i, $i = 1, \ldots, k$, mají f i f' jednostranné vlastní limity. Pak Fourierova řada funkce f konverguje bodově na $\mathbb{R}$ k funkci $g(x) = \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$, kde $f(x_+)$, resp. $f(x_-)$, značí limitu funkce f v bodě x zprava, resp. zleva. Je-li navíc f spojitá funkce, pak její Fourierova řada konverguje k f stejnoměrně na $\mathbb{R}$.

Na několika z dalších příkladů se přesvědčíme o užitečnosti Parsevalovy rovnosti, o které hovoří následující věta.

Nechť f je spojitá s výjimkou konečně mnoha bodů a $\int_a^{a+2l} f^2(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ pro nějaká $a \in \mathbb{R}$ a $l > 0$. Pak platí, že

$$\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

[5] Dostatečně bohatou zásobu lebesgueovsky integrovatelných funkcí na intervalu I dávají funkce spojité s výjimkou konečně mnoha bodů, jejichž absolutní hodnota má zobecněný Riemannův integrál.

kde a_{n-1}, b_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou Fourierovy koeficienty funkce f (přesněji libovolné $2l$-periodické funkce $\hat{f}$, která je rovna f na intervalu $(a, a+2l)$).

<u>Příklad</u> Uvažujte 2π-periodickou funkci f, která je rovna $\frac{x}{2}$ na intervalu $[-\pi, \pi)$. Vyšetřete, k čemu konverguje její Fourierova řada bodově, rozhodněte, zda jde o konvergenci stejnoměrnou, a zjistěte, co říká Parsevalova rovnost pro tento případ.

Řešení. Funkce je díky zadání 2π-periodická a je po částech hladká (v intervalu $[-\pi, \pi]$ stačí zvlášť uvažovat jen oba krajní body). Automaticky je pak f integrovatelná na omezených intervalech.

Integrály definující Fourierovy koeficienty a_n jsou nulové díky tomu, že funkce $f(x)\cos(nx)$ je na intervalu $(-\pi, \pi)$ lichá.

Počítejme

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{x}{2} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[x \tfrac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \tfrac{\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \tfrac{-\pi \cos n\pi}{n} = (-1)^{n+1} \tfrac{\pi}{n}.$$

Fourierovou řadou funkce f je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Tato řada konverguje k $f(x)$ pro ta reálná x, která nejsou celým lichým násobkem π podle předchozí věty. Taková x jsou totiž dokonce body spojitosti f, a tedy $f(x) = \frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$. V lichých násobcích π pak řada konverguje k nule $(= \frac{f(\pi_+)+f(\pi_-)}{2})$.

Protože Fourierova řada je řadou spojitých funkcí a její součet není funkce spojitá, nejde o stejnoměrnou konvergenci.

Protože funkce f^2 má zřejmě konečný integrál na každém omezeném intervalu, je splněn předpoklad Parsevalovy rovnosti, a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^3}{6}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Parsevalova rovnost nám tedy dává rovnost $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. ■

Připomeňme si ještě, že konverguje-li trigonometrická řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(nx\frac{\pi}{l}\right) + b_n \sin\left(nx\frac{\pi}{l}\right)\right)$$

k funkci f stejnoměrně, pak a_n a b_n jsou nutně Fourierovými koeficienty funkce f.

<u>Příklad</u> Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady π-periodické funkce, která se rovná funkci $\cos x$ na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Řešení. Povšimněme si, že hodnoty funkce v bodech $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, nejsou popisem určeny jednoznačně. Nicméně ze zadání snadno plyne, že funkce je v $\mathcal{P}(\pi)$ a že je po částech hladká.

Zadání odpovídá hodnota $l = \frac{\pi}{2}$ z definice Fourierových koeficientů a Fourierovy řady. Všimněme si, že Fourierovy koeficienty a řada zadané funkce budou splývat s koeficienty a řadou funkce $|\cos x|$. To je sudá funkce, a proto tentokrát budou nulové koeficienty b_n. Počítejme

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos\left(nx\frac{\pi}{(\frac{\pi}{2})}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\cos((2n+1)x) + \cos((2n-1)x)\right) \mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right). \end{aligned}$$

Fourierovou řadou všech funkcí odpovídajících zadání je tedy

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nx.$$

Protože funkce $|\cos x|$ je po částech hladká a spojitá, konverguje tato řada stejnoměrně k funkci $|\cos x|$.

Povšimněme si navíc, že jde zároveň o trigonometrickou řadu 2π-periodické funkce $|\cos x|$. Z výše řečeného je zřejmé, že nalezená řada je zároveň Fourierovou řadou zadané funkce uvažované jako funkce z $\mathcal{P}(2\pi)$. To je tzv. kosinová řada sudé 2π-periodické funkce. ■

<u>Příklad</u> Uvažujte 1-periodickou funkci, která je rovna x^2 na intervalu $(0, 1)$. Zjistěte, co říká příslušná Parsevalova rovnost pro tuto funkci.

Řešení. Jde o funkci, jejíž čtverec je integrovatelný na intervalu $(0, 1)$. (Navíc jde o po částech hladkou funkci a mohli bychom tedy též studovat, k čemu konverguje příslušná Fourierova řada jako v předchozích příkladech.) Počítejme její Fourierovy koeficienty:

$a_0 = 2\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$,

$a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2 n^2}$ pro $n \in \mathbb{N}$ (proveďte si podrobně a všimněte si, proč jsme počítali a_0 zvlášť),

$b_n = 2\int_0^1 x^2 \sin(2\pi nx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi n}$.

Parsevalova rovnost nám tedy říká, že

$$2\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi^4 n^4} + \frac{1}{\pi^2 n^2}\right).$$

Spočteme-li integrál a užijeme-li rovnost $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, kterou jsme odvodili výše, dostáváme $\frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^4 n^4} + \frac{1}{\pi^2}\frac{\pi^2}{6}$, a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

■

Už jsme si zdůraznili to, že aplikací Parsevalovy rovnosti můžeme dostat informaci o součtu číselné řady, která je zajímavá, případně pro nás nová. Totéž lze ovšem říci mnohdy i o součtu Fourierovy řady samotné, jak uvidíme v následujících dvou příkladech.

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady funkce $|x|$ na intervalu $(-1,1)$. (Přesněji: Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady nějaké 2-periodické funkce, která má dané zúžení na $(-1,1)$.) Co dává výsledek pro bod $x = 0$?

Řešení. Definujme funkci f na celém $\mathbb{R}$ tak, aby splňovala podmínky zadání, byla 2-periodická a navíc pro pohodlí tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}$. Taková funkce je jediná a $f(1+2k) = 1$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Tato funkce je navíc po částech hladká. Proto její Fourierova řada konverguje k f stejnoměrně.

Díky sudosti zadané funkce vidíme bez výpočtu, že $b_n = 0$. Snadno spočteme, že $a_0 = 2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1$ a $a_n = 2\int_0^1 x\cos(nx\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$.

Hledanou Fourierovou řadou je $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(nx\pi)$ a ta konverguje stejnoměrně k f na $\mathbb{R}$.

Dosadíme-li $x = 0$, dostaneme $0 = \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}$, a tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(Povšimněte si, že poslední rovnost lze odvodit též ze znalosti součtu řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.) ■

P ř í k l a d Vyšetřete konvergenci Fourierovy řady 2π-periodické funkce f, která je rovna $\operatorname{sgn} x$ na intervalu $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a nule na zbytku intervalu $[-\pi,\pi]$. Napište, co výsledek říká pro $x = \frac{\pi}{2}$.

Řešení. Výpočtem zjistíme, že Fourierovou řadou je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1-\cos\frac{\pi n}{2})\sin nx$. Protože zadaná funkce je po částech hladká, konverguje její Fourierova řada v bodě $\frac{\pi}{2}$

k hodnotě $\frac{f(\frac{\pi}{2}+)+f(\frac{\pi}{2}-)}{2} = \frac{1}{2}$, a tedy je

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1 - \cos\frac{\pi n}{2})\sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(2n-1)}.$$

Tedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$. (Tato rovnost by nám už měla být známa, neboť jde o vyjádření hodnoty funkce $\operatorname{arctg} 1$ pomocí příslušné Taylorovy řady.) ■

K tomu, abychom lépe rozuměli, jak spolu souvisejí Fourierovy řady funkcí, pokud je rozvíjíme jako funkce s různými periodami, je dobré rozmyslet si, že koeficienty $2l$-periodické funkce vzhledem k trigonometrickému systému $2l$-periodických funkcí a vzhledem k systému $2lk$-periodických funkcí pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ splývají. Přesněji, koeficienty vzhledem k funkcím $\cos\left(nx\frac{\pi}{lk}\right)$, $\sin\left(nx\frac{\pi}{lk}\right)$, kde n není dělitelné k, o které se tyto dva systémy liší, jsou nulové.

<u>Příklad</u> Spočtěte Fourierovy koeficienty π-periodické funkce f, která je rovna x na intervalu $(0, \pi)$. Co říká Parsevalova rovnost?

Řešení. Budeme funkci uvažovat jako 2π-periodickou. Protože platí předchozí věta o jednoznačnosti, musí nám vyjít táž Fourierova řada, kterou bychom dostali, kdybychom uvažovali naši funkci jako π-periodickou. Je $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi$. Pokud k funkci f přičteme konstantu $-\frac{\pi}{2}$, dostaneme lichou funkci. Ale konstantní funkce má nulové koeficienty a_n, $n \in \mathbb{N}$, a tedy můžeme dále počítat jen b_n a to pro funkci f nebo $f(x) - \frac{\pi}{2}$, což musí opět vyjít nastejno. Pro $f(x) - \frac{\pi}{2}$ můžeme ovšem využít lichost této funkce. Máme

$$b_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\int_{0}^{\pi}(x - \frac{\pi}{2})\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Funkce má integrovatelný kvadrát na intervalu $(-\pi, \pi)$, a tedy z Parsevalovy rovnosti dostáváme, že $\frac{\pi^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2$.

Celkem máme tedy, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$, což nás už nepřekvapí. ■

Literatura

[B] J. Bečvář, *Lineární algebra*, Matfyzpress, 2000.

[FII] G.M. Fichtěngol'c, *Kurs differencial'nogo i intěgral'nogo isčislenija II*, Nauka, Moskva, 1966. (rusky)

[G] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices, Vol. I*, AMS, 2000.

[D1] V. Jarník, *Diferenciální počet I*, Academia, 1984.

[D2] V. Jarník, *Diferenciální počet II*, Academia, 1984.

[I1] V. Jarník, *Integrální počet I*, Academia, 1984.

[I2] V. Jarník, *Integrální počet II*, Academia, 1984.

[JKZ] O. John, O. Kalenda a M. Zelený, *Matematika (pokračování)*, Matfyzpress, 2003.

[Ko] J. Kopáček, *Matematická analýza pro fyziky III*, Matfyzpress, 1999.

[K1] J. Kopáček a kol., *Příklady z matematiky pro fyziky I*, Matfyzpress, 1998.

[K2] J. Kopáček a kol., *Příklady z matematiky pro fyziky II*, Matfyzpress, 1996.

[K3] J. Kopáček a kol., *Příklady z matematiky pro fyziky III*, SPN Praha, 1988.

[K4] J. Kopáček a kol., *Příklady z matematiky pro fyziky IV*, Matfyzpress, 1996.

[LM] J. Lukeš and J. Malý, *Measure and integral*, Matfyzpress, 1995.

[R] K. Rektorys a spol., *Přehled užité matematiky* (2. vydání), SNTL, 1968.

[Z] L. Zajíček, *Vybrané úlohy z matematické analýzy*, Matfyzpress, 2000.

Petr Holický, Ondřej F. K. Kalenda

METODY ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

pro 2. až 4. semestr

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 166. publikaci

Recenzoval Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.

Obálku navrhl Petr Kubát

Z předloh připravených v systému $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

Vydání druhé

Praha 2006

ISBN 80-86732-72-X
ISBN 80-85863-85-5 (1. vydání)