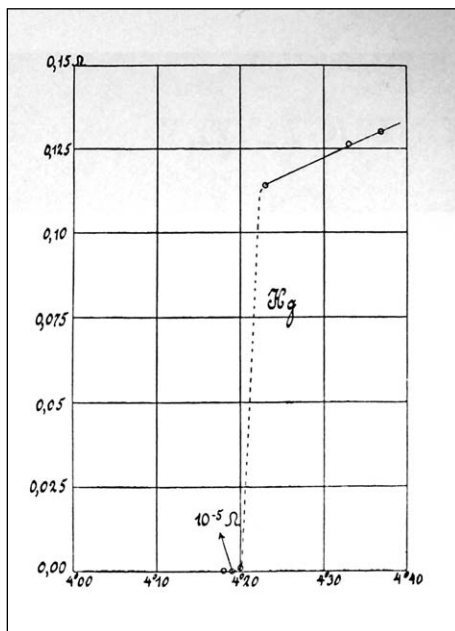


JIŘÍ ENGLICH

**ÚVOD
DO PRAKTICKÉ FYZIKY
I**

ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ MĚŘENÍ



Jeden z experimentů, které změnilы vývoj fyziky v minulém století. V roce 1911 prof. H. Kamerlingh Onnes ve své laboratoři v Leydenu měřil teplotní závislost odporu vzorku rtuti. V okolí teploty 4,2 K naměřil „skokový“ pokles odporu o čtyři řády (viz obrázek, který je historickým originálním záznamem experimentu, na ose x je vynesena teplota v Kelvinech (K)). Jev, který byl později potvrzen a nalezen při nižších teplotách i na jiných kovech, např. cínu a olovu, byl interpretován jako fázový přechod látky do kvalitativně nového stavu, který byl nazván stavem supravodivým. Podrobnosti a historické souvislosti experimentu jsou uvedeny např. v článku C. J. Gortera (Rev. Mod. Phys. 1 (1964)). Za tento výsledek a další práci v oblasti fyziky a techniky nízkých teplot byl prof. H. Kamerlingh Onnes oceněn v roce 1913 Nobelovou cenou za fyziku.

JIŘÍ ENGLICH

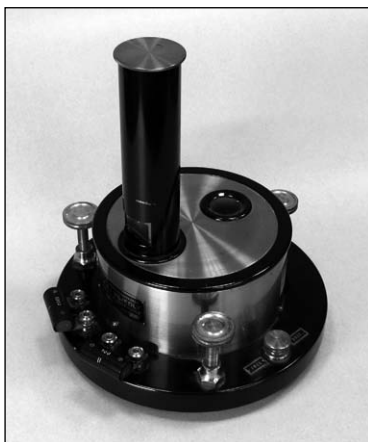
ÚVOD
DO PRAKTICKÉ FYZIKY
I

ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ MĚŘENÍ



matfyzpress

PRAHA 2006



Balistický galvanoměr na obálce byl součástí polarografu, který byl zkonstruován podle návrhu prof. J. Heyrovského. Prof. Heyrovský, jako dosud jediný vědec české národnosti, získal v roce (1959) Nobelovu cenu právě za objev a rozvoj metody polarografické analýzy. Automatizované verze polarografů, které obsahovaly tento galvanoměr, byly vyráběny firmou Dr. V. & J. Nejedlý v letech 1929–1946.

Všechna práva vyhrazena. Tato publikace ani žádná její část nesmí být reprodukována nebo šířena v žádné formě, elektronické nebo mechanické, včetně fotokopí, bez písemného souhlasu vydavatele.

© Jiří English, 2006

© MATFYZPRESS, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze, 2006

ISBN 80-86732-93-2

OBSAH

1. Fyzikální veličiny a jejich jednotky	1
1.1 Systematika fyzikálních veličin	1
1.2 Jednotky fyzikálních veličin	3
1.3 Metrologické rovnice	4
1.4 Soustavy jednotek	8
2. Nejistota měření	24
2.1 Základní pojmy	25
2.2 Odhad maximální nejistoty nepřímých měření	28
2.3 Nejistota metody, nejistoty měřidel	30
2.4 Zaokrouhlování konstant	36
3. Vybrané základní pojmy matematické statistiky	39
3.1 Statistický experiment, náhodný jev, pravděpodobnost	40
3.2 Rozdělení pravděpodobnosti, distribuční funkce	45
3.3 Střední hodnota, momenty náhodné veličiny, medián	60
3.4 Rozdělení pravděpodobnosti více náhodných veličin	65
3.5 Centrální limitní věta	71
4. Princip maximální věrohodnosti	75
4.1 Odhad parametrů rozdělení z jediného experimentu	75
4.2 Opakované nezávislé experimenty	78
4.3 Zpracování výsledků měření jediné veličiny	88
4.4 Přenos nejistoty	91
4.5 Zpracování výsledků nepřímých měření	92
4.6 Příspěvek nejistoty typu B	95
4.7 Příklad - měření viskozity	97
5. Interpolace funkčních závislostí	101
5.1 Přímka procházející počátkem	105
5.2 Příklad - měření tuhosti pružiny	110
5.3 Polynom k-tého stupně	114
5.4 Obecná přímka	115
5.5 Možnosti využití transformace souřadnic	120
5.6 Alternativní řešení	123

6. Přílohy	129
6.1 Definice základních jednotek SI	129
6.2 Měření odporu metodou přímou	130
6.3 Princip nonia	133
6.4 Rozdělení pravděpodobnosti součtu náhodných veličin	134
7. Seminární úlohy	137
8. Literatura	145

PŘEDMLUVA

Tento text vznikl postupně jako základní literatura pro seminární výuku předmětu „Úvod do praktické fyziky“, kterou autor řadu let vede v prvním semestru magisterského a v současné době bakalářského studia fyziky na matematicko-fyzikální fakultě (MFF) UK v Praze. Předmět je teoretickým úvodem, který má posluchačům přinést v první řadě základní informaci a podat konkrétní návody pro zpracování výsledků měření. Součástí této části výuky je i podrobnější rozbor systému fyzikálních jednotek.

V současné době jsou výstupem rozhodující části měřicích metod ve všech oblastech experimentální fyziky elektrické veličiny, jejichž analogové hodnoty se následně převádějí do číslicového formátu s možností dalšího zpracování s využitím stále zdokonalované výpočetní techniky. Neméně významnou součástí úvodu k praktické výuce experimentálních fyziků je proto i informace o metodách měření základních, zejména elektrických veličin, a způsobech jejich digitalizace.

Vzhledem k tomu, že v současné době je výuka „Úvodu do praktické fyziky“ dotována pouze jednou hodinou týdně, bylo nutno se omezit pouze na oblast zpracování výsledků měření. Pro tuto výuku je také konkrétně určen tento text, přičemž jeho teoretická úroveň musela být přizpůsobena úrovni znalosti matematiky v prvním semestru studia. Skriptum bylo proto pojmenováno „Úvod do praktické fyziky I“, s podtitulem „Zpracování výsledků měření“, aby byla zdůrazněna potřeba dalšího pokračování, ve kterém by mohla být podrobněji a na vyšší úrovni zpracována problematika statistických metod zpracování výsledků měření, a dále zmíněná problematika měřicích metod základních fyzikálních veličin. V neposlední řadě by tento druhý díl měl obsahovat i konkrétnější informaci o způsobu realizace základních jednotek systému SI, protože problematice metrologie, ač je pro experimentální fyziku důležitá, není ve výuce na MFF UK z různých důvodů věnována odpovídající pozornost. Doufejme jen, že se druhý díl dočká v brzké době své realizace.

V první kapitole předkládaného textu se autor snaží překonat dojem, který si ve své většině studenti přinášejí ze střední školy, totiž že existující systém fyzikálních jednotek SI je jedinou možnou alternativou a v systému obsažené (uni-

verzální) konstanty jsou neměnnou součástí příslušných fyzikálních zákonů. Podrobnější studium této části textu je zároveň cvičením k metodě rozměrové analýzy vyložené v první kapitole.

Druhá kapitola je věnována základním představám a pravidlům prezentace výsledků fyzikálních měření. Ve smyslu moderních evropských norem je zde snaha zavést pojem nejistoty výsledku v kontrastu s tradičně užívaným pojmem chyba. Důležitým aspektem této části je oddělit nejistotu statistického charakteru od nejistoty způsobené omezenou přesností měřících přístrojů. Právě v této oblasti je nutné další prohloubení, zejména v otázkách zdrojů chyby u různých typů měření elektrických veličin. Zde by tedy mělo být těžiště problematiky předpokládané druhé části skriptu.

Ve třetí kapitole jsou jednoduchým způsobem, bez nároků na úplnost, zavedeny základní pojmy matematické statistiky, nutné pro výklad statistických metod odhadu výsledků měření jediné veličiny, kterými se zabývá kapitola čtvrtá, a výsledků interpolace měření funkčních závislostí v kapitole páté. Text je v některých odstavcích doplněn jednoduchými příklady a v kapitole čtvrté potom podrobně zpracovaným měřením dynamické viskozity kapaliny s využitím experimentálních výsledků z praktika mechaniky a molekulové fyziky na MFF UK. Pro potřeby seminární výuky jsou v kapitole sedmé uvedeny seminární úlohy, jejichž řešení má čtenáři usnadnit pochopení textu. Jako seminární úlohy jsou též zařazeny důkazy některých tvrzení, použitých v textu. Pro řešení všech úloh je v textu příslušných kapitol dostatek informací a analogických postupů. Úlohy jsou označeny číslem kapitol, ke kterým se vztahují.

Autor chce touto cestou poděkovat řadě kolegů a studentů MFF UK, kteří se různou formou zúčastnili přípravy rukopisu. Významný podíl na vzniku a kvalitě textu má RNDr. H. Valentová, CSc. (v současnosti FgÚ AV ČR), která díky svým zkušenostem získaným během své dlouholeté činnosti v základní fyzikálním praktiku na MFF UK mohla poskytnout významné podněty a připomínky, zejména vzhledem ke konkrétním potřebám studentů při praktické výuce. Dále patří dík dalším kolegům na MFF UK, zejména doc. RNDr. J. Nedbalovi, CSc., RNDr. J. Čížkovi, CSc., doc. RNDr. Z. Práškové, CSc. a prof. RNDr. B. Sedlákoví, DrSc. za přečtení textu a řadu stimulujících připomínek a diskusí. V neposlední řadě děkuje autor recenzentce doc. RNDr. I. Stulíkové, CSc., která svým zájmem a podporou významně přispěla ke konečné realizaci tohoto textu.

Praha, listopad 2006

Jiří English

1. FYZIKÁLNÍ VELIČINY A JEJICH JEDNOTKY

1.1 SYSTEMATIKA FYZIKÁLNÍCH VELIČIN

V řadě oblastí přírodních a technických věd, v technické a obchodní praxi, ale i v běžném životě se vyskytuje potřeba charakterizovat objektivní vlastnosti a stav předmětů a okolního prostředí, popsat průběh různých procesů apod. K tomu se zavádí systém veličin, které uvedené vlastnosti a stav charakterizují. Potřebné informace potom získáváme pozorováním, tedy speciálním postupem, při němž stanovíme kvantitativní, popřípadě kvalitativní parametry příslušných veličin, eventuálně jejich vztahy k veličinám ostatním.

Pozorovat můžeme na jedné straně jevy a procesy, které probíhají bez našeho zásahu a bez možnosti jejich průběh ovlivňovat, a na druhé straně stav, děje a procesy, které iniciujeme, řídíme, volíme podmínky jejich průběhu apod. V prvním případě jsou typickým příkladem pozorování astronomická, ve druhém případě pak hovoříme o pokusu nebo experimentu. Podle charakteru výsledku můžeme pokus dále dělit na pokus kvalitativní a pokus kvantitativní. Kvalitativním pokusem může být například stanovení charakteru pH roztoku zbarvením lakmusového papírku nebo zjištění, že pozorovaná kapalina dosáhla teploty varu. Jako kvantitativní chápeme takové pokusy, kdy lze výsledek, tedy objektivní stav studované veličiny, vyjádřit v číselné formě srovnáním s obecně zavedenou jednotkou. V takovém případě hovoříme o měření.

Definicí pojmu fyzikální veličiny se lidé zabývali od samých počátků svých obchodních, hospodářských, technických a vědeckých aktivit. Jako příklad je možné uvést definici, kterou podal Leonard Euler ve svém díle „Algebra“ z roku 1766:

1. veličinou rozumíme vše to, co se může zvětšovat nebo zmenšovat, nebo to, k čemu můžeme něco přidat nebo ubrat (hmotnost, čas, délka, teplota, tlak, teplo, úhel, ...),
2. existují veličiny různého druhu, jejichž studiem se zabývají různé oblasti vědy (fyziky). Každá oblast vědy má své charakteristické veličiny. Fyzika je naukou o veličinách,
3. měření je srovnávání dané veličiny s vybranou veličinou téhož druhu (jednotkou).

První část Eulerovy definice se v současné době obvykle nahrazuje modernější definicí:

„Veličinou popisujeme objektivní vlastnost (stav) předmětu nebo fyzikálního jevu, kterou lze kvalitativně odlišit a kvantitativně popsat.“

Druhá část definice se nahrazuje klasifikací veličin na

- a) extenzivní (množství, kvantita) - aditivní (hmotnost, náboj, teplo, ...)
- b) intenzivní (kvalita) - veličiny stavové (teplota, napětí, tlak, ...)
- c) protenzivní (stále plynoucí) - (čas)

Charakteristika pojmu měření se od dob Eulerových nezměnila a výsledek měření veličiny x , tedy srovnání její velikosti s velikostí dané jednotky, zapisujeme ve tvaru

$$x = (\tilde{\mu}_x \pm u_{x,c}) [x] , \quad (1.1)$$

kde $\tilde{\mu}_x$ je nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny, číslo $u_{x,c}$ je vyjádřením nejistoty výsledku měření a hranatá závorka v (1.1) je obecným symbolem pro označení použité jednotky měření, pokud je toto označení platnou normou zavedeno (viz např. [1]).

Jednotky měření dělíme dále na jednotky základní a jednotky odvozené. Jednotky základní, tedy jednotky veličin, které byly v daném systému jednotek za základní vybrány, definují tzv. systém (soustavu) jednotek a jejich volba je ovlivněna spíše tradicí a požadavky technické praxe, než nějakými rigorózními požadavky fyzikálními. V každém případě by však měl existovat pokud možno všeobecně akceptovaný systém poměrně snadno realizovatelných, dobře reprodukovatelných a časově stabilních základních jednotek, protože v opačném případě by se zkomplikovaly nejen podmínky komunikace uvnitř vědeckých komunit, což je problém principiálně řešitelný, ale hlavně by se znemožnily procesy standardizace ve výrobě, technické praxi a v obchodě, což by prakticky neřešitelným způsobem znemožnilo rozvoj všech rozhodujících oblastí technických a hospodářských aktivit moderní společnosti. V současné době je až na drobné výjimky všeobecně akceptován a národními normami uzákoněn mezinárodní systém jednotek („System International” (SI) - viz odst. 1.4). Jednotkami odvozenými jsou pak jednotky veličin, které jsou s veličinami základními spojeny pokud možno jednoduchými definičními vztahy (viz dále). V případě měření jednotek odvozených, kdy není normou zavedeno označení jednotky, má hranatá závorka v (1.1) význam tzv. rozměru. Rozměr je vyjádřením jednotky

měřené jednotkami základními pomocí definičního vztahu. Například pro jednotku rychlosti není v systému SI zavedeno označení a proto se podle definičního vztahu $v = s/t$ označení jednotky rychlosti nahrazuje rozměrem $[v] \equiv \text{m s}^{-1}$.

1.2 JEDNOTKY FYZIKÁLNÍCH VELIČIN

Jednotky fyzikálních veličin se, jak již bylo řečeno, vytvářely historicky, hlavně vzhledem k potřebám obchodu a rozvoji technické praxe. Od začátku byla hlavním kritériem praktičnost a snadná dostupnost jednotky, později se rozvíjely snahy o objektivitu. Příkladem může být snaha o objektivizaci jednotky délky. Standardně používané jednotky „palec“ nebo „loket“ byly samozřejmě závislé na tělesné konstrukci konkrétních osob. Proto již v 16. století navrhl Jakob Köble ve svém díle Geometrie, které bylo vydáno ve Frankfurtu (a.M), jako jednotku délky „střední stopu“, která měla být střední hodnotou délky chodidla šestnácti náhodně vybraných osob. Proces hledání systému základních jednotek byl postupem času završen vytvořením mezinárodně uznávaných standardů, od kterých byly dále odvozovány standardy národní. Vzhledem k tomu, že člověk žije v prostoru a čase, je pochopitelné, že mezi základní jednotky v každém systému patřily vždy jednotky pro měření délky a času, k nimž byla pro potřeby mechaniky, která byla historicky první z významně se rozvíjejících oblastí fyziky, přidána jednotka hmotnosti. Vlastní způsob realizace jednotek délky a času se vzhledem ke vzrůstajícím nárokům na přesnost a objektivitu postupně poměrně rozmanitě měnil. Způsob realizace jednotky hmotnosti formou standardu vytvořeného již v roce 1889 naproti tomu všechny reformy přečkal v nezměněné podobě až do doby moderní. Podrobnosti o způsobu současné realizace nejen základních jednotek délky, času a hmotnosti, ale i všech ostatních fyzikálních jednotek v současně užívaném systému SI je možno najít např. v normě [1] nebo publikaci [2].

S rozvojem dalších oblastí fyziky se systém základních jednotek postupně rozšiřoval. Způsob tohoto rozšiřování však není nijak rigorózně definován, ve volbě dalších základních jednotek je značná libovůle, takže dosažení všeobecně uznávaného konsenzu je náročné. V současné době je hlavním kritériem pro eventuální zásahy do systému jednotek ekonomická náročnost případné změny.

Blíže bude o pravidlech a některých zákonitostech výstavby systému základních jednotek pojednáno v odstavci 1.4.

1.3 METROLOGICKÉ ROVNICE

Jako metrologické rovnice se souhrnně označují matematické formulace vztahů mezi fyzikálními veličinami, jejich jednotkami a rozměry. V prvním případě mluvíme o rovnicích veličinových, dále pak o rovnicích jednotkových a rozměrových. Veličinové rovnice popisují zkoumané přírodní zákony nebo zavádějí nové veličiny. Například veličinová rovnice

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (1.2)$$

je obecnou formulací 2. Newtonova zákona, která popisuje vztah mezi působící silou \vec{F} a časovou změnou hybnosti \vec{p} . Jiná veličinová rovnice

$$\vec{F} = q(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})) \quad (1.3)$$

popisuje silové působení elektrického (\vec{E}) a magnetického pole (\vec{B}) na pohybující se elektrický náboj q , zatímco rovnice

$$\rho = \frac{dM}{dV} \quad , \quad (1.4)$$

kde M značí hmotnost a V objem, zavádí hustotu látky (ρ).

Jednotkové rovnice popisují vztahy mezi jednotkami studovaných veličin a formulují se v co nejjednodušší formě, bez diferenciálních, integrálních, popř. jiných složitějších operátorů. Pro již uvedené příklady veličinových rovnic (1.2.)–(1.4) jsou jednotkovými rovnicemi postupně

$$j_F = \frac{j_p}{j_t}, \quad j_F = j_q \cdot j_E, \quad j_F = j_q \cdot j_v \cdot j_B, \quad j_\rho = \frac{j_m}{j_V}, \quad (1.5)$$

kde symbolem j_F je označena jednotka síly a obdobně i v ostatních případech jednotky dalších použitých veličin.

Rozměrovými rovnicemi jsou jednotkové rovnice rozepsané pomocí jednotek základních, tedy bez užití případných speciálních označení jednotek zavedených v daném systému. Například v systému SI je rozměrovou rovnicí veličinové rovnice (1.2) rovnice

$$[F] = \text{kg m s}^{-2} = [p][t^{-1}] = \text{kg m s}^{-1} \text{ s}^{-1}.$$

V případě rovnice (1.3) pro silové působení na náboj pohybující se v magnetickém poli máme rozměrovou rovnici

$$[F] = \text{kg m s}^{-2} = [q][v][B] = \text{As m s}^{-1} \text{ kg s}^{-2} \text{A}^{-1}.$$

Rovnosti pravé a levé strany rozměrových rovnic je možné využít pro kontrolu správnosti formulace rovnic veličinových. Tomuto postupu říkáme rozměrová analýza. Protože však rozměrové rovnice neobsahují bezrozměrné číselné konstanty, je případné splnění rovnic rozměrových pro celkovou správnost rovnic pouze podmínkou nutnou, nikoliv postačující.

Uveďme dále několik příkladů pro užití rozměrové analýzy. První z možností je kontrola odvozených formulí. Předpokládejme, že jsme užitím definičního vztahu

$$J = \int_V r^2 \rho dV \quad (1.6)$$

vypočetli, že moment setrvačnosti homogenního válce o poloměru R a hmotnosti M je dán vztahem

$$J = \frac{1}{2} MR^2. \quad (1.7)$$

Z definičního vztahu je zřejmé, že rozměr momentu setrvačnosti v soustavě SI je $[J] = \text{kg m}^2$. Potom ale pro výsledný vzorec (1.7) v této soustavě skutečně platí

$$\text{kg m}^2 = [J] = [M][R^2] = \text{kg m}^2$$

a odvozený vzorec je rozměrovou analýzou „potvrzen“. Další možností je tzv. kontrola stupně mocninných závislostí. V řadě případů jsou výsledné fyzikální formule dány jednoduchými mocninnými závislostmi, při čemž není vždy a priori jasný stupeň příslušných mocnin. Předpokládejme například, že se snažíme formulovat vztah pro dobu kyvu matematického kyvadla (T). Předpokládáme, že doba kyvu bude záležet na gravitačním zrychlení g , délce kyvadla l a jeho hmotnosti m , přičemž není předem jasné, v jakých mocninách se budou příslušné veličiny ve výsledné formuli vyskytovat. Napíšeme tedy

$$T \sim g^\alpha l^\beta m^\gamma . \quad (1.8)$$

Rozměr levé strany rovnice (1.8) v soustavě SI je $[T] = \text{s}$. Rozměr pravé strany je

$$[g^\alpha][l^\beta][m^\gamma] = \text{m}^\alpha \text{s}^{-2\alpha} \text{m}^\beta \text{kg}^\gamma = \text{m}^{\alpha+\beta} \text{s}^{-2\alpha} \text{kg}^\gamma .$$

Srovnáním rozměrů levé a pravé strany rovnice (1.8)

$$\text{s} = \text{m}^{\alpha+\beta} \text{s}^{-2\alpha} \text{kg}^\gamma$$

dostáváme podmínky pro exponenty α , β , γ

$$\alpha + \beta = 0, \quad -2\alpha = 1, \quad \gamma = 0 . \quad (1.9)$$

Z rovnic (1.9) je okamžitě vidět, že předpoklad o závislosti doby kyvu na hmotnosti kyvadla byl mylný, protože $\gamma = 0$ a dále snadno najdeme

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} .$$

Formule (1.8), která není v rozporu s rozměrovou analýzou, má tedy tvar

$$T \approx \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Jako další případ uveďme formuli pro sílu, kterou na sebe působí pólové nástavce elektromagnetu se vzduchovou mezerou a s uzavřeným jádrem. Předpokládejme, že vzduchová meze je úzká a síla bude tedy úměrná ploše nástavců S , magnetické indukci v mezeře elektromagnetu B a permeabilitě μ . Hledáme tedy formuli ve tvaru

$$F \approx \mu^\alpha B^\beta S^\gamma . \quad (1.10)$$

Rozměr levé strany formule (1.10) je v soustavě SI

$$[F] = \text{kg m s}^{-2} .$$

Rozměr pravé strany potom

$$\begin{aligned} [\mu^\alpha][B^\beta][S^\gamma] &= \text{kg}^\alpha \text{ m}^\alpha \text{ s}^{-2\alpha} \text{ A}^{-2\alpha} \text{ kg}^\beta \text{ s}^{-2\beta} \text{ A}^{-\beta} \text{ m}^{2\gamma} = \\ &= \text{kg}^{\alpha+\beta} \text{ m}^{\alpha+2\gamma} \text{ s}^{-2\alpha-2\beta} \text{ A}^{-2\alpha-\beta} . \end{aligned}$$

Srovnání rozměru pravé a levé strany formule (1.10) dostaneme pro α , β , γ podmínky:

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha + 2\gamma = 1, \quad -2\alpha - \beta = 0 . \quad (1.11)$$

Řešením soustavy rovnic (1.11) jsou hodnoty exponentů

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1 .$$

Formule (1.10) neodporující rozměrové analýze má tedy tvar

$$F \approx \frac{1}{\mu} B^2 S .$$

Některé další možnosti aplikace rozměrové analýzy jsou podrobněji probrány například v práci [3].

Popsaná nejjednodušší metoda užití rozměrové analýzy pro kontrolu fyzikálních rovnic je principiálně omezena počtem základních jednotek, kterým je určen i počet možných nezávislých rovnic pro koeficienty mocninných závislostí. Užití rozměrové analýzy má však mnohem širší oblast možností využití. Je zejména důležitou součástí teorie fyzikální podobnosti a modelování, kde se používá při řešení základních rovnic matematické fyziky, například v mechanice stavebních konstrukcí, mechanice tekutin, termomechanice, modelování elektrických polí apod. Blíže jsou základy této problematiky vyloženy například v knize [4].

1.4 SOUSTAVY JEDNOTEK

Výstavba všeobecně akceptovatelné soustavy fyzikálních jednotek probíhala postupně. Důležitým mezníkem bylo uzavření „mezinárodní metrické konvence“ v roce 1875 a následující aktivity jejího nejvyššího orgánu „Generální konference pro míry a váhy“. Tato konference přijala na svém zasedání v roce 1960 „Mezinárodní soustavu jednotek“ (SI). Předchůdci soustavy SI byly všeobecně užívané soustavy CGS, CGSE, CGSM, soustava Gaussova, MKS a konečně MKSA. Historické aspekty postupného zavádění zmíněných soustav jednotek jsou blíže rozebrány např. v publikaci [2] nebo v knize [5].

V označení soustav vystupují zkratky označení základních jednotek. Tak v případě CGS je to „centimetr“, „gram“, „sekunda“ a podobně „metr“, „kilogram“, „sekunda“ a „ampér“ u soustavy MKSA.

Soustava CGS byla vytvořena pro použití v mechanice a její další použití v ostatních oblastech fyziky vyžadovalo buď doplnění o další základní jednotky nebo, při ponechání tří základních jednotek, zavedení jednotek všech dalších užívaných veličin jako jednotek odvozených. Například v oblasti elektřiny a magnetizmu se jako první odvozená jednotka používala jednotka pro elektrický náboj, odvozená z Coulombova zákona. Všechny ostatní jednotky elektrické i magnetické byly jednotkami odvozenými. Vznikla soustava jednotek označovaná jako CGSE (absolutní soustava elektrostatická).

Při opačném postupu, kdy první odvozenou jednotkou byla jednotka pro „hypotetické“ magnetické množství odvozená z „formálně“ platného „Coulombova“ zákona pro silové působení magnetických množství, byla vytvořena soustava jednotek CGSM (absolutní soustava elektromagnetická).

Výhodou těchto soustav bylo to, že např. při použití soustavy CGSE neobsahovaly rovnice vyjadřující vztahy mezi veličinami elektrickými žádné číselné faktory. Podobně v soustavě CGSM byly rovnice popisující vztahy mezi magnetickými veličinami bez číselných faktorů. V rovnicích, ve kterých vystupovaly společně veličiny jak elektrické, tak i magnetické, se však v obou soustavách konstanty úměrnosti vyskytovat musely. Při experimentálním zkoumání těchto faktorů bylo objeveno, že vesměs jde o konstanty s číselnou hodnotou a rozměrem mocnin rychlosti světla ve vakuu. Tato skutečnost vedla později k úvahám o elektromagnetické povaze světla (viz např. [5]).

Spojením soustav CGSE a CGSM vznikla soustava Gaussova, v níž byly jednotky elektrických veličin převzaty z CGSE a jednotky magnetických veličin z CGSM. Základní zákony tím získaly symetrickou podobu, nicméně ve smíšených vztazích se konstanty velikosti a rozměru mocnin rychlosti světla stále vyskytují.

Nevýhodou uvedených soustav elektrických a magnetických jednotek (odvozených od soustavy CGS), je nepraktičnost velikosti jednotek běžně užívaných veličin. Například pro jednotku proudu v soustavě CGSE (sA – statampér) platí $1\text{sA} \cong 3.10^{-10}\text{ A}$, pro jednotku odporu (s Ω – statohm) dostaneme $1\text{s}\Omega \cong 9.10^{11}\Omega$. Podobně je v absolutní soustavě elektromagnetické například pro jednotku napětí (aV – abvolt) $1\text{aV} = 10^{-8}\text{ V}$ a v soustavě Gaussově naproti tomu pro (sV – statvolt) $1\text{sV} \cong 3.10^{-2}\text{V}$.

Proto byla dále navržena soustava MKSA, která pro oblast elektřiny a magnetizmu opustila princip výstavby užitím pouze tří základních jednotek a zavedla novou základní jednotku pro elektrický proud (A – ampér). Tato soustava se později stala základem pro současně používanou soustavu SI. Podrobněji je o jednotkách používaných v elektřině a magnetizmu pojednáno např. v učebnici [5]. Princip výstavby soustavy jednotek s využitím pouze tří základních jednotek ostatně nebyl dodržen ani u soustavy CGS a ostatních (CGSE, CGSM a Gaussova), protože pro další oblasti fyziky byly zavedeny další základní jednotky. Například pro termodynamiku a nauku o teple byla jako základní jednotka zavedena jednotka pro teplotní stupeň, v optice jednotka pro svítivost, v molekulové fyzice jednotka molekulového množství.

Způsob realizace jednotek jednotlivých fyzikálních veličin, zejména jednotek základních, je předmětem metrologie a není cílem tohoto textu zabíhat do detailů, v konkrétních otázkách je možno odkázat na již zmíněnou knihu [1] nebo publikaci [2].

Dále přesto uveďme dvě základní vlastnosti, které by všeobecně užívaná soustava jednotek měla mít. Soustava jednotek by předně měla být koherentní, což znamená, že veličinové (a jednotkové) rovnice používané jako definiční pro veličiny odvozené, by neměly obsahovat číselné koeficienty. Například veličinovou rovnicí zavádějící rychlost hmotného bodu je možno formulovat jako

$$\vec{v} = k_v \frac{d\vec{r}}{dt} ,$$

tedy rychlost je úměrná časové změně polohového vektoru. Zjednodušení této rovnice pro rovnoměrný přímočarý pohyb

$$v = k_v \frac{s}{t}$$

je definičním vztahem pro rychlost a v koherentním systému jednotek musí být konstanta úměrnosti $k_v = 1$ a bezrozměrná. V tomto případě by ovšem mělo být v přesném slovním vyjádření definičního vztahu uvedeno: „rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu je číselně rovna poměru dráhy a času“.

V definičních vztazích, které vyhovují kulové nebo válcové symetrii se v některých případech zavádějí faktory $4\pi(2\pi)$ s cílem odstranit násobky π z prakticky užívaných formulí. Takové soustavy jednotek se nazývají racionalizované. Příkladem může být soustava SI. Coulombův zákon pro silové působení mezi dvěma bodovými náboji o velikosti q ve vzdálenosti r má zde známý tvar

$$F = k_c \frac{q^2}{r^2} .$$

Použijeme-li dále standardní postup a najdeme vztah pro kapacitu deskového kondenzátoru s plochou desek S ve vzdálenosti d (ve vakuu), dostaneme

$$C = \frac{S}{4\pi k_c d} .$$

Má-li konstanta k_c racionalizovaný tvar

$$k_c = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} ,$$

dostaneme běžně používaný vztah

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} ,$$

ve kterém již faktor 4π nevystupuje. Prakticky užívaná formule tak obsahuje pouze jednu konstantu. Racionalizace se používá v případech, které mají podobně jako tento příklad určitý praktický význam. V jiných případech formulí s kulovou symetrií, kde není potřeba odstranit faktory úměrné π příliš výrazná, se racionalizace nepoužívá. Příkladem může být gravitační zákon Newtonův, jehož konstanta úměrnosti (gravitační konstanta) se v SI faktorem 4π nenormuje. Soustava SI, jakož i většina dřívějších soustav jednotek, není tedy důsledně racionalizovaná.

Pro volbu základních jednotek dané soustavy fyzikálních jednotek, tzv. báze, neexistují žádná pevná pravidla. Hlavním požadavkem na jejich výběr je mož-

nost snadné realizace příslušných standardů, jejich dostupnost pro srovnávací a kalibrační měření a samozřejmě časová stabilita. Základních jednotek by nemělo být příliš mnoho, aby se nekomplikovalo vyjádření odvozených jednotek formou rozměru.

Historicky byly proto jako první dvě základní jednotky realizovány jednotky pro délku (L) a čas (T). Stejně potřebná (a nejen pro fyziku) byla jednotka pro hmotnost (M). Pomocí těchto tří základních jednotek pak bylo možno vytvořit celý koherentní systém jednotek pro mechaniku. Jednotka síly je v této „tříjednotkové“ bázi (L,T,M) jednotkou odvozenou. Dále záleží na tom, který fyzikální zákon použijeme pro odvození jednotky síly (F). V systému SI se využívá II. Newtonův zákon ve zjednodušeném tvaru $F = M a$, kde jednotka pro zrychlení a je stanovena jako jednotka odvozená z jednotek rychlosti a času. Postup je znázorněn v tab. 1.1. Při formulaci dalších zákonů, které obsahují veličiny, jejichž jednotky již byly zavedeny, musíme příslušné konstanty úměrnosti stanovit experimentálně. Například v Newtonově gravitačním zákoně při vyjádření velikosti silového působení mezi dvěma hmotnými body M_1, M_2 ve vzdálenosti r

$$F = \kappa \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad (1.12)$$

musíme experimentálně stanovit číselnou hodnotu konstanty úměrnosti κ (gravitační konstanty). Tato číselná hodnota závisí ovšem na velikosti jednotek síly, hmotnosti a délky. Například při vyjádření jednotkami soustavy SI je (experimentálně stanovená) gravitační konstanta

$$\kappa \cong 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} . \quad (1.13)$$

Při přechodu k soustavě s jinou „tříjednotkovou bází“, např. CGS se velikost gravitační konstanty změní $\kappa^{CGS} = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$. Pokud by se při přechodu k nové soustavě neměnily jednotky pouze řádově, změnil by se samozřejmě v hodnotě gravitační konstanty nejen řád.

Podobně je nutno Planckovu hypotézu o vztahu mezi energií a kmitočtem elektromagnetické vlny formulovat obecně ve tvaru

$$E = h \nu$$

Tab. 1.1 „Tříjednotková báze“

Veličina	Označení	Definiční vztah	Rozměr	Velikost jednotky (v jednotkách SI)
základní				
délka	s		L	m
čas	t		T	s
hmotnost	M		M	kg
odvozené				
rychlost		$v = s / t$	LT^{-1}	$m \cdot s^{-1}$
zrychlení		$a = v / t$	LT^{-2}	$m \cdot s^{-2}$
síla		$F = M a$	MLT^{-2}	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$ (N)
práce		$A = F s$	ML^2T^{-2}	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ (J)
kmitočet		$\nu = 1/T$	T^{-1}	s^{-1} (Hz)
.....	

a konstantu úměrnosti h (Planckovu konstantu) s rozměrem $[h] = ML^2T^{-1}$ stanovit experimentálně. V soustavě SI naměříme $h \cong 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. Velikost konstanty opět závisí na volbě velikosti jednotek báze.

Jako poslední příklad uvedme známý Einsteinův vztah pro ekvivalenci energie a hmotnosti

$$E = k_E M .$$

Z rozměru konstanty úměrnosti $[k] = L^2T^{-2}$ plyne, že konstanta má rozměr čtverce rychlosti. Číselná hodnota konstanty je obdobně jako v předchozích případech závislá na volbě jednotek dané soustavy, nicméně podle výsledku speciální teorie relativity platí, že je rovna čtverci rychlosti světla ve vakuu c , takže v soustavě mechanických jednotek s bází (L,T,M), konstruované postupem podle tab. 1.1 platí $E = c^2M$, bez ohledu na formu realizace jednotlivých jednotek báze. Dále ukážeme, že tento „populární“ tvar Einsteinovy formule se změní nejen při změně báze systému jednotek, ale i při změně zákonů vybraných pro definici jednotek odvozených, například jednotky síly.

Konstanty úměrnosti, které je potřeba vložit do vztahů, které nejsou vztahy definičními, jsou často nazývány „univerzálními“ konstantami. Role univerzálních konstant bývá někdy poněkud přeceňována a objevují se i snahy hledat

v jejich existenci a velikosti nějaký hlubší význam. Ukažme dále, jak by se změnil hypotetický systém jednotek mechaniky s „tříjednotkovou“ bází (LTM) v případě, že by se pro definici jednotky síly nepoužil II. Newtonův zákon (tab. 1.1), ale zákon jiný, například Newtonův zákon gravitační.

Tab. 1.2 Alternativní „tříjednotková“ báze

Veličina	Označení	Definiční vztah	Rozměr	Velikost jednotky (v jednotkách SI)
základní				
délka	s (r)		L	m
čas	t		T	s
hmotnost	M		M	kg
odvozené				
rychlost		$v = s / t$	LT^{-1}	$m \cdot s^{-1}$
zrychlení		$a = v / t$	LT^{-2}	$m \cdot s^{-2}$
síla		$F = M^2 / r^2$	M^2L^{-2}	$\kappa \text{ N} \cong 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$
práce		$A = F s$	M^2L^{-1}	$\kappa \text{ J} \cong 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ J}$
kmitočet		$\nu = 1 / T$	T^{-1}	s^{-1} (Hz)
.....	

Situace je dokumentována v tabulce 1.2. Velikost síly v alternativní soustavě s „tříjednotkovou“ bází se změní. Jednotkou síly bude nyní síla, kterou na sebe působí jednotkové hmotnosti v jednotkové vzdálenosti. Ponecháme-li pro porovnání jednotky báze ze soustavy SI (L,T,M) = (m,s,kg), je jednotkovou silou síla o velikosti

$$j_F = \kappa \text{ N} \cong 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N} . \quad (1.14)$$

Newtonův gravitační zákon bude v alternativním systému jednotek zapsán bez konstanty úměrnosti (gravitační konstanty) ve tvaru

$$F = \frac{M_1 M_2}{r^2} ,$$

zatímco ve II. Newtonově zákoně musíme nyní zavést novou konstantu úměrnosti (univerzální konstantu k_N , kterou nazveme například „Newtonovou konstantou“)

$$F = k_N M a . \quad (1.15)$$

Rozměrovou analýzou s využitím tab. 1.2 snadno ukážeme, že rozměr Newtonovy konstanty je $[k_N] = \text{ML}^{-3}\text{T}^2$ což odpovídá převrácené hodnotě rozměru gravitační konstanty κ . Pokud by byl nový (alternativní) systém systémem původním, bylo by nutné Newtonovu konstantu stanovit experimentálně. Nicméně s ohledem na vztah mezi rozměry a novou velikost jednotky síly je zřejmé, že pro velikost konstanty k_N platí

$$k_N = \frac{1}{\kappa} , \quad (1.16)$$

a pokud je velikost gravitační konstanty z původního systému jednotek známa, stačí Newtonovu konstantu, potřebnou v novém systému, pouze přepočítat. Newtonova konstanta bude v alternativním „tříjednotkovém“ systému vystupovat například v definicích kinetické a potenciální energie:

$$E_k = \frac{k_N}{2} M v^2 \text{ a } E_p = k_N M g h ,$$

zatímco třetí Keplerův zákon o vztahu mezi dobami oběhu (T) a velikostí hlavní poloosy (a) oběžné dráhy planet pohybujících se okolo centrálního tělesa o hmotnosti (M) bude v alternativní soustavě bez gravitační konstanty

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{M} .$$

V dalším zákoně, uváděném jako příklad v této diskusi, v zákoně Planckově, se samozřejmě změní jak velikost, tak i rozměr konstanty úměrnosti ($k_p^{(3)}$) a zákon bude mít tvar

$$E = k_p^{(3)} v .$$

Zde zavádíme v konstantě úměrnosti horní index jako označení dimenze báze základních jednotek mechaniky. Srovnáním s tab. 1.2 snadno najdeme, že $[k_p^{(3)}] = \text{M}^2\text{L}^{-1}\text{T}$, což odpovídá poměru rozměrů Planckovy a gravitační konstanty v bázi původní. Přestože rozměrová analýza není schopna určit velikost kon-

stanty $k_p^{(3)}$, lze rozborem velikosti jednotky energie, podobně jako v případě diskuse velikosti Newtonovy konstanty (1.16), snadno ukázat, že platí

$$k_p^{(3)} = \frac{h}{\kappa},$$

kde h a κ jsou Planckova a gravitační konstanta v bázi původní. Konečně pro Einsteinův vztah mezi hmotností a energií dostaneme

$$E = k_E^{(3)} M$$

s konstantou úměrnosti s rozměrem $[k_E^{(3)}] = \text{ML}^{-1}$. Chceme-li novou konstantu úměrnosti vyjádřit pomocí konstant úměrnosti v původní „tříjednotkové“ bázi se základními jednotkami SI (L,T,M) = (m,s,kg), je srovnáním rozměrů zřejmé, že v tomto případě platí

$$k_E^{(3)} = \frac{c^2}{\kappa}$$

a konstantou úměrnosti mezi energií a hmotností v tomto případě není čtverec rychlosti světla ve vakuu.

Způsob definice jednotky síly tedy změnil systém univerzálních konstant. Místo gravitační konstanty se v systému nachází nová konstanta Newtonova a i u ostatních univerzálních konstant se mění jak jejich rozměr, tak i velikost. Nemění se však jejich celkový počet. Celkový počet univerzálních konstant se mění až s počtem základních jednotek, s velikostí báze.

Při zvětšení počtu základních jednotek dochází obecně ke zvětšení počtu univerzálních konstant. V našem hypotetickém systému základních jednotek mechaniky můžeme jako další základní jednotku zavést například jednotku síly. Realizujeme ji nějakým standardem, například ideální pružinou. Postup odvozování dalších mechanických jednotek je podobný jako v soustavě s tříjednotkovou bází a je znázorněn v tab. 1.3. Při formulaci Newtonova pohybového zákona je zde třeba uvážit, že všechny veličiny v zákoně vystupující už mají v tomto případě jednotky zavedeny, zákon tedy není definičním vztahem a musí obsahovat univerzální konstantu

$$F = k_N^{(4)} M a . \tag{1.17}$$

Velikost univerzální konstanty (Newtonovy) $k_N^{(4)}$, je závislá na velikosti základních jednotek a musí být stanovena experimentálně. Její rozměr je

$$[k_N^{(4)}] = \text{FM}^{-1}\text{L}^{-1}\text{T}^2 .$$

Tab. 1.3 „Čtyřjednotková“ báze

Veličina	Označení	Definiční vztah	Jednotka	Rozměr	Velikost jednotky (v jednotkách SI)
základní					
délka	s		L	L	m
čas	t		T	T	s
hmotnost	M		M	M	kg
síla	F		F	F	$k_N^{(4)}$ N
odvozené					
rychlost		$v = s / t$		LT^{-1}	$m \cdot s^{-1}$
zrychlení		$a = v / t$		LT^{-2}	$m \cdot s^{-2}$
práce		$A = F s$		FL	$k_N^{(4)}$ J
kmitočet		$\nu = 1 / T$		T^{-1}	s^{-1} Hz
.....	

Podobně i v případě gravitačního zákona

$$F = k_G^{(4)} \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

bude $[k_G^{(4)}] = FM^{-2}L^2$. Srovnáním rozměrů konstant v Newtonových zákonech opět snadno najdeme

$$[k_G^{(4)}] = [k_N^{(4)}] \cdot [\kappa] ,$$

což napovídá, že obdobná relace platí i pro velikosti uvedených konstant, samozřejmě za předpokladu, že jednotky pro L, T, a M se při pouhém rozšíření systému o jednotku síly nezměnily a stále platí $(L,T,M) = (m,s,kg)$. V případě Planckova vztahu

$$E = k_p^{(4)} \nu$$

se opět změní jak číselná hodnota, tak i rozměr Planckovy konstanty $[k_p^{(4)}] = FLT$. V případě Einsteinovy formule

$$E = k_E^{(4)} M$$

již nemá konstanta úměrnosti rozměr čtverce rychlosti $[k_E^{(4)}] = FLM^{-1}$. Pokud se opět systém základních jednotek nezměnil a stále máme $(L,T,M) = (m,s,kg)$,

snadno najdeme, že pro konstanty úměrnosti v Planckově a Einsteinově zákoně platí

$$k_p^{(4)} = k_N^{(4)} \cdot h \quad \text{a} \quad k_E^{(4)} = k_N^{(4)} \cdot c^2 .$$

S rostoucím počtem základních jednotek přibývají v systému univerzální konstanty a některé formule mohou získat poněkud jinou, netradiční formu. Proto se také v elektřině a magnetizmu při přechodu od tříjednotkových systémů (CGSE, CGSM, Gaussova soustava) k nové, „čtyřjednotkové“ bázi obsahující další jednotku pro elektrický proud, objevuje nová univerzální konstanta. V systému SI je to např. permitivita vakua ϵ_0 . Permeabilita vakua μ_0 , která se v používaných formulích v SI též vyskytuje, však již není nezávislou univerzální konstantou, protože platí $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ (viz např. [5]). Při dalším rozšíření báze o jednotku pro teplotní stupeň se objeví univerzální konstanta Boltzmanova apod.

Při vytváření báze systému jednotek se však můžeme pohybovat i směrem opačným. Snadno lze například redukovat počet základních jednotek mechaniky ze tří na dvě. Je možné například spojit Newtonův gravitační zákon s Newtonovým zákonem pohybovým, tedy formule (např. v jednotkách SI)

$$F = \kappa \frac{M M'}{r^2} \quad \text{a} \quad F = M' a$$

do jediného vztahu, čímž získáme formuli

$$M = \frac{1}{\kappa} r^2 a \quad , \quad (1.18)$$

kterou je možné použít pro definici jednotky hmotnosti jako jednotky odvozené. Konstantu úměrnosti položíme díky požadavku na koherentnost systému rovnou jedné a jednotku hmotnosti definujeme jako hmotnost, která libovolné jiné hmotnosti udílí v jednotkové vzdálenosti jednotkové zrychlení. Výstavba systému jednotek s „dvoujednotkovou“ bází základních jednotek pro mechaniku je znázorněna v tab. 1.4. Pro definici jednotky síly můžeme zvolit například II. Newtonův zákon, tedy podmínku $k_N = 1$. Ze vztahu (1.18) pro koherentní definici jednotky hmotnosti vyplývá, že i gravitační konstanta $\kappa = 1$ a Newtonův gravitační zákon bude tedy mít v nově zavedené „dvoujednotkové“ soustavě tvar

$$F = \frac{M_1 M_2}{r^2} ,$$

tedy bez univerzální konstanty. Planckův zákon

$$E = k_p^{(2)} \nu$$

však již konstantu úměrnosti obsahovat musí, přičemž s využitím tab. 1.4 snadno najdeme $[k_p^{(2)}] = L^5 T^{-3}$.

Podobně v případě Einsteinova vztahu

$$E = k_E^{(2)} M$$

snadno ukážeme, že $[k_E^{(2)}] = L^2 T^{-2}$. Využitím výsledků rozměrové analýzy a tab. 1.4, je-li $(L, T) \equiv (m, s)$, je možno podobně jako v předešlém případě snadno ukázat, že

$$k_p^{(2)} = h \cdot \kappa \quad \text{a naopak} \quad k_E^{(2)} = c^2 .$$

Snížení počtu základních jednotek vede tedy ke snížení počtu univerzálních konstant, v tomto konkrétním případě o konstantu gravitační. To je na jedné straně výhodné, na druhé straně však dochází ke změně ve velikosti nových jednotek, které se mohou stát značně nepraktickými. Situace je dostatečně dokumentována výsledky v tab. 1.4.

Tab. 1.4 „Dvoujednotková“ báze

Veličina	Označení	Definiční vztah	Rozměr	Velikost jednotky (v jednotkách SI)
základní				
délka	s		L	m
čas	t		T	s
odvozené				
rychlost		$v = s / t$	LT^{-1}	$m \cdot s^{-1}$
zrychlení		$a = v / t$	LT^{-2}	$m \cdot s^{-2}$
hmotnost		$M = a r^2$	$L^3 T^{-2}$	$1 / \kappa \text{ kg} \cong 1,5 \cdot 10^{10} \text{ kg}$
síla		$F = M a$	$L^4 T^{-4}$	$1 / \kappa \text{ N} \cong 1,5 \cdot 10^{10} \text{ N}$
práce		$A = F s$	$L^5 T^{-4}$	$1 / \kappa \text{ J} \cong 1,5 \cdot 10^{10} \text{ J}$
kmitočet		$\nu = 1 / T$	T^{-1}	$s^{-1} \quad (\text{Hz})$
.....	

Pokud bychom při konstrukci „dvoujednotkové“ soustavy ponechali hmotnost jako jednotku základní a jako jednotku odvozenou bychom s využitím zákona o šíření světla ve vakuu vybrali například jednotku délky, vypadala by situace v této (alternativní) „dvoujednotkové“ soustavě podle tab. 1.5. Newtonův gravitační zákon bude v této soustavě jednotek ve tvaru

$$F = k_G^{(2)'} \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

s konstantou úměrnosti $k_G^{(2)'}$, s rozměrem $[k_G^{(2)'}] = M^{-1}T$. Formy dalších dvou zákonů využívaných výše jako příklady se také odpovídajícím způsobem změni

$$E = k_p^{(2)'} \nu \quad \text{a} \quad E = k_E^{(2)'} M \quad ,$$

Tab. 1.5 Alternativní „dvoujednotková“ báze

Veličina	Označení	Definiční vztah	Rozměr	Velikost jednotky (v jednotkách SI)
základní				
čas	t		T	s
hmotnost	M		M	kg
odvozené				
délka		$s = c t$	T	$c \text{ m} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m}$
rychlost		$v = s / t$	-	$c \text{ ms}^{-1} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
zrychlení		$a = v / t$	T^{-1}	$c \text{ ms}^{-2} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-2}$
síla		$F = M a$	MT^{-1}	$c \text{ N} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ N}$
práce		$A = F s$	M	$c^2 \text{ J} \cong 9 \cdot 10^{16} \text{ J}$
kmitočet		$\nu = 1 / T$	T^{-1}	$s^{-1} \quad (\text{Hz})$
.....	

přičemž pro rozměry konstant platí $[k_p^{(2)'}] = MT$ a $[k_E^{(2)'}] = 1$. Dále je opět možno nalézt vztah nových konstant s konstantami systému „tříjednotkového“, takže platí-li jako v ostatních našich příkladech $(T, M) \equiv (s, \text{kg})$, potom

$$k_G^{(2)'} = \frac{\kappa}{c^3}, \quad k_p^{(2)'} = \frac{h}{c^3} \quad \text{a} \quad k_E^{(2)'} = 1 \quad .$$

Další snížení počtu základních jednotek je možno realizovat například v bázi (L,T) volbou jednotky délky jako jednotky odvozené, tedy jako jednotku základní ponecháme pouze jednotku času. Pro definici jednotky délky je možno zvolit již použitý zákon pro šíření světla ve vakuu

$$s = c t \quad . \quad (1.19)$$

V koherentním systému volíme konstantu $c = 1$ a bezrozměrnou a jednotka délky je tedy definována jako vzdálenost, kterou světlo ve vakuu urazí za jednotku času. Další postup je znázorněn v tab. 1.6. Protože způsob realizace jednotky hmotnosti byl ponechán stejný jako v předchozím případě soustavy „dvoujednotkové“, je zřejmé, že forma Newtonových zákonů bez univerzálních konstant se nezmění

$$F = M a \quad , \quad F = \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad .$$

Tab. 1.6 „Jednojednotková“ báze

Veličina	Označení	Definiční vztah	Rozměr	Velikost jednotky (v jednotkách SI)
základní				
čas	t		T	s
odvozené				
délka		$s = c t$	T	$c \text{ m} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m}$
rychlost		$v = s / t$	-	$c \text{ ms}^{-1} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
zrychlení		$a = v / t$	T^{-1}	$c \text{ ms}^{-2} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-2}$
hmotnost		$M = a r^2$	T	$c^3 / \kappa \text{ kg} \cong 1,1 \cdot 10^{37} \text{ kg}$
síla		$F = M a$	-	$c^4 / \kappa \text{ N} \cong 3,3 \cdot 10^{45} \text{ N}$
práce		$A = F s$	T	$c^5 / \kappa \text{ J} \cong 1,1 \cdot 10^{54} \text{ J}$
kmitočet		$\nu = 1 / T$	T^{-1}	s^{-1} (Hz)
.....	

Pokračujeme-li v posloupnosti výše uvedených příkladů, má Planckův zákon obecný tvar

$$E = k_p^{(1)} v$$

s konstantou úměrnosti s rozměrem $[k_p^{(1)}] = T^2$, zatímco Einsteinova formule má tvar

$$E = k_E^{(1)} M \quad ,$$

kde $[k_E^{(1)}] = 1$.

Využitím rozměrové analýzy a úvah o velikosti nových jednotek je možno snadno ukázat vztahy mezi novými konstantami a konstantami předcházejících dvou a původní „tříjednotkové“ báze. Je-li opět $(L,T) \equiv (m,s)$ a $(L,T,M) \equiv (m,s,kg)$, potom platí

$$k_p^{(1)} = \frac{k_p^{(2)}}{c^5} = \frac{h\kappa}{c^5} \quad \text{a} \quad k_E^{(1)} = \frac{k_E^{(2)}}{c^2} = 1 \quad .$$

Náš hypotetický systém jednotek s „jednojednotkovou“ází obsahuje nyní pouze jedinou konstantu úměrnosti $k_p^{(1)}$ s rozměrem čtverce času (v rámci diskutovaného modelu). Tato situace nabízí cestu pro eventuální další pokračování postupu s cílem konstruovat soustavu jednotek bez univerzálních konstant.

Zvolme jednotku času pomocí univerzální konstanty $k_p^{(1)}$ tak, že

$$j_T = \sqrt{k_p^{(1)}} = \left(\frac{h\kappa}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (1.20)$$

Jednotka času, stejně jako všechny ostatní jednotky, je tedy v tomto systému jednotkou odvozenou. Soustavu jednotek bez jednotek základních vytvořenou využitím univerzálních konstant navrhl počátkem minulého století Max Planck a nazval ji „přirozenou soustavou jednotek“. Kromě tří univerzálních konstant h, κ, c využil ještě konstantu Boltzmanovu způsobem zcela analogickým naposledy diskutované volbě jednotky času. Definice a velikosti některých jednotek přirozené soustavy vyjádřené jednotkami SI jsou uvedeny v tab. 1.7. Je vidět, že ve srovnání se soustavou SI jsou velikosti jednotek poměrně nepraktické. V přirozené soustavě nelze navíc využívat rozměrovou analýzu. Obě tyto skutečnosti silně znevýhodňují přirozenou soustavu pro použití v technické praxi. Na druhé straně je výhodou tvar fyzikálních zákonů bez univerzálních konstant, což je pro fyzikální úvahy, zvláště v některých speciálních oblastech, příjemné. Ve fyzikálních rovnicích se vyskytují pouze symboly pro veličiny, které vyjadřují číselnou hodnotu vzhledem k dané jednotce. Tak například konstanta jemné struktury α , která se v SI obvykle uvádí ve tvaru

Tab. 1.7 „Přirozená“ soustava jednotek

Veličina	Definiční vztah	Rozměr	Velikost jednotky (v jednotkách SI)
odvozené			
čas	$(h\kappa/c^5)^{\frac{1}{2}}$	-	$(h\kappa/c^5)^{\frac{1}{2}} \text{ s} \cong 1,35 \cdot 10^{-43} \text{ s}$
délka	$s = ct$	-	$(h\kappa/c^3)^{\frac{1}{2}} \text{ m} \cong 4 \cdot 10^{-35} \text{ m}$
rychlost	$v = s/t$	-	$c \text{ ms}^{-1} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
zrychlení	$a = v/t$	-	$(c^7/h\kappa)^{\frac{1}{2}} \text{ ms}^{-2} \cong 2 \cdot 10^{51} \text{ ms}^{-2}$
hmotnost	$M = ar^2$	-	$(ch/\kappa)^{\frac{1}{2}} \text{ kg} \cong 5,5 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$
síla	$F = Ma$	-	$c^4/\kappa \text{ N} \cong 1,2 \cdot 10^{44} \text{ N}$
práce	$A = Fs$	-	$(c^5h/\kappa)^{\frac{1}{2}} \text{ J} \cong 5 \cdot 10^9 \text{ J}$
kmitočet	$\nu = 1/t$	-	$(c^5/h\kappa)^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1} \cong 7,4 \cdot 10^{42} \text{ s}^{-1}$
teplota	$E = T$	-	$(c^5h/k^2\kappa)^{\frac{1}{2}} \text{ K} \cong 3,6 \cdot 10^{32} \text{ K}$
náboj (*)	$F = q^2/r^2$	-	$(ch)^{\frac{1}{2}} \text{ C} \cong 4,7 \cdot 10^{-18} \text{ C}$
.....

(*) jednotka náboje je zde vytvořena analogicky soustavě CGSE.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \hbar c},$$

kde e , ε_0 , \hbar , c jsou postupně náboj elektronu, permitivita vakua, Planckova konstanta dělená 2π a rychlost světla ve vakuu, má v Planckově soustavě jednoduchý tvar

$$\alpha = 2\pi e^2,$$

kde $e \cong 0,034$ má v tomto případě pouze číselnou hodnotu, která je vyjádřením velikosti náboje elektronu vzhledem k nové jednotce náboje v Planckově soustavě (viz tab. 1.7). Podobně formule pro Bohrov poloměr atomu platná v SI

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2},$$

(m_e je hmotnost elektronu), se v přirozené soustavě Planckově redukuje na jednodušší tvar

$$a_0 = \frac{1}{\pi m_e e^2} ,$$

kde $m_e \cong 1,6 \cdot 10^{-23}$ je klidová hmotnost elektronu vyjádřená tentokrát v přirozené soustavě jednotek.

Planckova přirozená soustava jednotek je zde podrobněji diskutována zejména proto, aby bylo možno blíže posoudit význam a roli „univerzálních“ konstant v daném systému jednotek. Je zřejmé, že počet „univerzálních“ konstant, jejich velikosti i rozměry jsou silně závislé na počtu a způsobu realizace nejen základních, ale i odvozených jednotek, a proto je jejich označení jako „univerzální“ poměrně diskutabilní. Přesto se, jak již bylo řečeno, poměrně často opakují snahy o jejich hlubší interpretaci (podrobněji viz např. [6]). Závěry takových úvah je proto vzhledem k této diskuzi nutno hodnotit opatrně.

Vedle Planckovy soustavy byly vytvořeny i další přirozené soustavy, z nichž některé využívaly konstanty v určitém smyslu univerzálnější. Vedle rychlosti světla ve vakuu například Bohrovův poloměr, klidovou hmotnost elektronu, elementární náboj apod. Blíže je problematika jednotek fyzikálních měření a s ní související problematika fyzikálních konstant diskutována například v knihách [7], [8] a [9].

2. NEJISTOTA MĚŘENÍ

Fyzika je přírodní věda, která pracuje s veličinami, které je, až na výjimky, možno podrobit opakovanému nezávislému testování měřením. Výsledek fyzikálního měření musí být (za stanovených podmínek) vždy reprodukovatelný bez ohledu na použitý měřicí přístroj a měřicí metodu. Výsledek měření (experimentu) je však při každém nezávislém opakování ovlivněn celou řadou vnějších i vnitřních vlivů, které nelze vždy popsat definováním vnějších podmínek a které se ve svém důsledku projeví buď jako náhodné fluktuace měřené veličiny v určité oblasti, nebo jako odchylka, která celou oblast náhodných fluktuací systematicky posunuje. Hovoříme o chybě statistické a chybě systematické. Výsledky nezávislých opakovaných měření mohou být navíc jednotlivě ovlivněny hrubým zásahem do procesu měření natolik, že charakteristická oblast náhodných fluktuací je výrazně překročena. V tom případě hovoříme o chybě hrubé.

Zpracování výsledku přímého měření jediné veličiny zahrnuje proto, až na výjimky, dva základní kroky. V prvním kroku jde vždy o stanovení nejlepšího přiblížení ke „správné“ hodnotě měřené veličiny a ve druhém kroku o stanovení oblasti neurčitosti v okolí tohoto přiblížení, ve které se měřená veličina oprávněně může vyskytovat.

Je-li měřená veličina ovlivněna náhodnými fluktuacemi, které ovlivňují výsledek měření do té míry, že při každém nezávislém opakování měření (za stejných podmínek) dostaneme hodnotu, která fluktuuje v jisté oblasti stupnice měřicího přístroje a je možno ji v rámci této stupnice odlišit o více než jediný dílek jejího nejjemnějšího dělení, provádíme odhad nejlepšího přiblížení ke „správné“ hodnotě a vymezení oblasti neurčitosti výsledku metodami matematické statistiky. Měříme-li naopak při opakovaných měřeních hodnoty v rozsahu jediného dílku nejjemnějšího dělení stupnice měřicího přístroje, neprovádíme statistické zpracování opakovaných výsledků a obě hodnoty, jak nejlepší přiblížení ke správné hodnotě, tak i oblast neurčitosti výsledku, odhadujeme. Způsob odhadu je založen na znalosti metody, použitých měřicích přístrojů a experimentální zkušenosti a je pro některé typické případy popsán v odst. 2.3. V zájmu maximální objektivity výsledku je v obecném případě nutno oba způsoby stanovení oblasti neurčitosti kombinovat.

Pokud chápeme chybu měření jako odchylku konkrétně naměřené hodnoty od správné hodnoty měřené veličiny, je zřejmé, že ji nelze stanovit, protože principiálně nelze stanovit správnou hodnotu. Proto se místo pojmu chyby měření zavádí pojem nejistota měření jako veličina, která charakterizuje určité toleranční pásmo kolem odhadnuté nejpravděpodobnější správné hodnoty měřené veličiny.

Pojem nejistota měření se zavádí na základě doporučení 70-tého a 75-tého zasedání „Mezinárodního výboru pro míry a váhy“ (CIMP – Comité International des Poids et Mesures) v letech 1981 a 1985. Praktické pokyny pro určování nejistot měření „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“ byly vydány v říjnu roku 1993 „Mezinárodní organizací pro normalizaci“ ISO jako doporučení pro národní normy a v řadě případů byly do národních norem prakticky beze změn převzaty (např. „US National Institute of Standards and Technology“, Technical Note 1297). U nás se pojem nejistota měření dosud běžně používá v metrologii a pomalu se zavádí do technické praxe. V laboratorních a fyzikálních měřeních se dosud používá pouze výjimečně. Protože však má zřejmě obecnější a širší význam a navíc je obecně přijat v řadě technicky rozvinutých zemí, budeme jej používat i v tomto textu.

2.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Metody používané ke stanovení numerických hodnot pro vyjádření nejistoty je možno rozdělit na metody statistické (typu A) a metody ostatní (typu B). Statistickými metodami se zpracovávají složky nejistoty, které mají původ v náhodných efektech. Typické jsou například výpočty standardní odchylky ze série nezávislých opakovaných měření (viz kap. 4) nebo fitování funkčních závislostí metodou nejmenších čtverců k odhadu parametrů funkčních závislostí a jejich standardních odchylek (viz kap. 5).

Mezi metody ostatní (typu B) patří hlavně postupy využívající výrobních specifikací, kalibračních údajů z návodů použitých měřicích přístrojů, znalosti podrobností použité měřicí metody a dále odborné intuice s využitím například souborů dříve měřených dat, znalostí a zkušeností s relevantními materiály a přístroji apod. (podrobněji viz odst. 2.3). Základní veličinou pro popis inter-

valu nejistoty je tzv. kombinovaná standardní nejistota s označením u_c . Veličina u_c je složena ze statisticky stanovené standardní nejistoty typu A (u_A , viz odst. 4.3) a odhadnuté standardní nejistoty typu B (u_B) podle vztahu

$$u_c^2 = u_A^2 + u_B^2, \quad (2.1)$$

Tento způsob spojení hodnot u_A a u_B je založen na postupu při stanovení nejistoty nepřímých měření (viz dále odst. 4.6). Výsledek měření zapisujeme ve tvaru

$$x = (\tilde{\mu}_x \pm u_{c,x}) [x], \quad (2.2)$$

kde číslo $\tilde{\mu}_x$ udává odhad správné hodnoty měřené veličiny a $u_{c,x}$ je odhad kombinované standardní nejistoty (2.1). Dále se zavádí veličina

$$\eta_{c,x} = \frac{u_{c,x}}{\tilde{\mu}_x}, \quad (2.3)$$

která je odhadem kombinované relativní nejistoty měření a obvykle se uvádí v procentech.

Symbol $[x]$ znamená označení jednotky měřené veličiny nebo její rozměr. Označení jednotky se používá v případě, že jednotka je v daném systému jednotkou základní. Například v systému SI je při měření hmotnosti $[m] \equiv \text{kg}$, při měření proudu $[I] \equiv \text{A}$ (Ampér), nebo má jednotka zavedený speciální název. Při měření síly je například $[F] \equiv \text{N}$ (Newton), při měření magnetické indukce $[B] \equiv \text{T}$ (Tesla), při měření odporu $[R] \equiv \Omega$ (Ohm) apod. Místo názvu jednotky se připouští i uvedení rozměru, tj. vyjádření jednotky pomocí jednotek v daném systému základních. Například v SI je v případě měření síly $[F] \equiv \text{N} \equiv \text{kg m s}^{-2}$, pro měření výkonu $[P] \equiv \text{W} \equiv \text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$, apod. Pokud nemá jednotka speciální název, je vždy označena svým rozměrem. Příkladem zde může být jednotka pro měření rychlosti v , kde je $[v] \equiv \text{ms}^{-1}$. Pro označení jednotek se dále připouštějí i normou zavedené předpony (např. mili – mA, mikro – μs , kilo – km, apod.) nebo mocniny deseti. Například místo 10^{-3} A , je možno použít označení mA (viz např. [10]).

Čísla, která vyjadřují výsledek měření (2.2) se získávají výpočtem a mají obecně tolik číslic, kolik je schopno zobrazit použité výpočetní zařízení (kalkulačka, počítač). V zobrazeném čísle se všechny číslice, s výjimkou nul na začátku zobrazené hodnoty, označují jako čísllice platné. Například číslo 0.00010050 má pět platných číslic. Výsledná nejistota měření se pak zaokrouhluje na nejméně dvě platné číslice. Rozhodnutí o tom, zaokrouhlíme-li výsledek výpočtu na jednu nebo dvě platné číslice závisí na konkrétní situaci, s ohledem na zaokrouhlovací chybu. Zaokrouhlíme-li například číslo 0,0014999 na jednu platnou číslici 0,001, je zaokrouhlovací chyba 0,0004999, tedy $\approx 50\%$. Při zaokrouhlení téhož výsledku na dvě platné číslice, tady 0,0015 se zaokrouhlovací chyba sníží na 0,0000001, tedy $\approx 0,007\%$. V jiném případě, například při zaokrouhlování výsledku 0,00104999 se při zaokrouhlení jak na jednu platnou číslici, tedy: 0,001, tak i na dvě platné číslice: 0,0010 dopustíme stejné zaokrouhlovací chyby, tedy v relativní hodnotě $\approx 5\%$. V obecném případě, je-li zaokrouhlovací chyba při zaokrouhlení na jednu platnou číslici pouze nevýznamně vyšší, než při zaokrouhlení na dvě platné číslice, uvádí se často výsledek zaokrouhlený pouze na jednu platnou číslici.

Z formátu čísla vyjadřujícího interval nejistoty vyplývá i formát čísla $\tilde{\mu}_x$, které nemá smysl uvádět (zaokrouhlovat) v řádu nižším, než je řád poslední platné číslice nejistoty. Uvedme příklad konkrétního postupu:

- a) výpočtem necht' je nalezeno $\tilde{\mu}_x = 12,3456789012$
 $u_{c,x} = 0,01234567891$
- b) zaokrouhlíme $u_{c,x} = 0,012$
 $\tilde{\mu}_x = 12,346$
- c) výsledek pro prezentaci $x = (12,346 \pm 0,012) [x]$.

Jak již bylo řečeno, připouští norma různé možnosti zápisu jak číselných hodnot, tak i rozměrů či označení veličin. Jako příklad je možno uvést několik možností, se kterými se ve fyzikální literatuře setkáváme nejčastěji

$$v = (3,86 \pm 0,03) \text{ ms}^{-1},$$

$$I = (2,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ A},$$

$$P = (8,706 \pm 0,054) \text{ mW} ,$$

$$B = 4,56(5) \text{ T} .$$

V posledním příkladu má zápis význam $B = (4,56 \pm 0,05) \text{ T}$.

2.2 ODHAD MAXIMÁLNÍ NEJISTOTY NEPŘÍMÝCH MĚŘENÍ

V převážné většině případů měříme fyzikální veličiny metodou nepřímou, tj. měříme veličiny dílčí, a hledanou veličinu, která je s dílčími veličinami vázána nějakou matematickou formulí, potom stanovujeme výpočtem. Jsou-li známy výsledky dílčích měření ve tvaru (2.2), vyvstává okamžitě otázka, jakou nejistotu má veličina výsledná. Tento problém se řeší obecně v odst. 4.5. Zde uvedme jen některé možnosti pro zjednodušený maximální odhad, který se v některých případech používá pro řádový odhad velikosti nejistoty při plánování experimentu. Chceme-li například měřit hustotu látky měřením hmotnosti a objemu daného vzorku, je otázkou, v jakém řádu se má pohybovat nejistota měřených veličin, aby relativní nejistota vypočtené hustoty byla nejvýše jedno procento. Tento problém je možno snadno vyřešit užitím formulí (2.7) (viz níže).

Výsledek měření ve tvaru (2.2) má formát tzv. neúplného čísla, tedy čísla, které je definováno intervalem hodnot. Necht' jsou dána čísla a a b ve tvaru

$$a = a_0 \pm \varepsilon_a \quad \text{a} \quad b = b_0 \pm \varepsilon_b .$$

Pro některé jednoduché aritmetické operace je možno v aproximaci maximálních mezí snadno odvodit pro

$$\begin{aligned} \text{součet} \quad S = a + b &= (a_0 + b_0) \pm (\varepsilon_a + \varepsilon_b) , \\ \varepsilon_s &= (\varepsilon_a + \varepsilon_b) , \\ \eta_s &= \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_b)}{a_0 + b_0} , \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\text{rozdíl} \quad R = a - b = (a_0 - b_0) \pm (\varepsilon_a + \varepsilon_b) ,$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= (\varepsilon_a + \varepsilon_b) , \\ \eta_s &= \frac{(\varepsilon_a + \varepsilon_b)}{a_0 - b_0} ,\end{aligned}\tag{2.5}$$

součin

$$\begin{aligned}N = ab &= (a_0 b_0) \pm (b_0 \varepsilon_a + a_0 \varepsilon_b) , \\ \varepsilon_N &= (b_0 \varepsilon_a + a_0 \varepsilon_b) , \\ \eta_N &= \frac{b_0 \varepsilon_a + a_0 \varepsilon_b}{a_0 b_0} = \eta_a + \eta_b ,\end{aligned}\tag{2.6}$$

podíl

$$\begin{aligned}P = \frac{a}{b} &= \frac{a_0}{b_0} \pm \left(\frac{\varepsilon_a}{b_0} + a_0 \frac{\varepsilon_b}{b_0^2} \right) , \\ \varepsilon_P &= \left(\frac{\varepsilon_a}{b_0} + a_0 \frac{\varepsilon_b}{b_0^2} \right) , \\ \eta_P &= \left(\frac{\varepsilon_a}{b_0} + a_0 \frac{\varepsilon_b}{b_0^2} \right) \frac{b_0}{a_0} = \eta_a + \eta_b ,\end{aligned}\tag{2.7}$$

mocninu

$$\begin{aligned}M = a^n &= a_0^n \pm n a_0^{n-1} \varepsilon_a , \\ \varepsilon_M &= n a_0^{n-1} \varepsilon_a , \\ \eta_M &= \frac{n a_0^{n-1} \varepsilon_a}{a_0^n} = n \eta_a .\end{aligned}\tag{2.8}$$

Zde je nutno upozornit na možnost enormního zvýšení relativní nejistoty při měření rozdílu blízkých hodnot a_0 , b_0 (viz (2.5)). Naměříme-li například časy t_1 , t_2 za účelem stanovení jejich rozdílu

$$t_1 = (19,5 \pm 0,1) \text{ s} \quad \text{a} \quad t_2 = (17,9 \pm 0,1) \text{ s} ,$$

mají obě měření relativní nejistotu okolo 0,5 %. Jejich rozdíl $\Delta t = t_1 - t_2$ má však podle (2.5) maximální nejistotu

$$\varepsilon_{\Delta t} = 0,2 \text{ s} ,$$

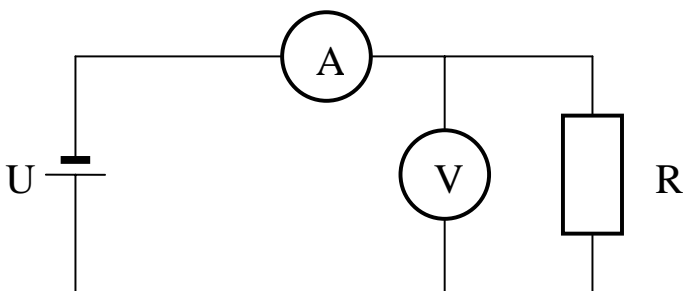
což odpovídá relativní nejistotě téměř 15 %. Odhad je sice odhadem maximálním a v odst. 4.5. získáme návod k jeho upřesnění, nicméně i zde vidíme, že nejistota rozdílu blízkých hodnot může enormně vzrůst. Proto je vždy zapotřebí

věnovat měření veličin, u nichž se předpokládá odečtení jejich velikosti, mimořádnou pozornost.

2.3 NEJISTOTA METODY, NEJISTOTY MĚŘIDEL

Stanovení nejistoty, kterou do výsledku měření vnáší samotná metoda měření, je proces, který vyžaduje hlubokou znalost fyzikálních zákonitostí a jevů využitých při daném měření, charakteristik použitých přístrojů, měřených veličin a v neposlední řadě dostatečnou experimentální zkušenost. Nejistota metody se obvykle projevuje jako nejistota (chyba) systematická. Využitím detailních znalostí parametrů použitých přístrojů a fyzikální podstaty měřicí metody je možno v některých případech tuto nejistotu stanovit a výsledek měření korigovat. V řadě jiných případů, kdy nelze nejistotu metody kvantifikovat, je nutno v zájmu objektivizace výsledku rozumně upravit interval nejistoty odhadem.

Obr. 2.1



Jako příklad postupu při stanovení systematické nejistoty metody je možno uvést výpočet korekce při měření odporu „metodou přímou“. V zapojení podle obr. 2.1 je při stanovení proudu tekoucího měřeným odporem nutno uvážit vnitřní odpor voltmetru. Oprava, která má význam chyby systematické, může posunout výsledek mimo oblast nejistoty stanovené z třídy přesnosti použitých přístrojů, eventuálně ze statistického rozptylu výsledků měření (podrobněji viz příloha 6.2). Ve speciálních případech, kdy je možno pro stanovení hodnoty měřené

veličiny použít několik různých metod měření, je možno chybu konkrétně použité metody posoudit srovnáním výsledků dosažených ostatními metodami.

Při některých měřeních dochází k situaci, kdy se při opakovaných měřeních výsledky pohybují v rozsahu jediného dílku nejjemnějšího dělení stupnice. V takovém případě neprovádíme statistické zpracování opakovaných nezávislých měření a výsledek interpolujeme z jediného údaje uvnitř nejjemnějšího dělení stupnice. Nejistotu takto interpolované hodnoty stanovíme podle údaje výrobce použitého přístroje. V případě elektromechanických analogových měřicích přístrojů je pro stanovení nejistoty naměřené hodnoty zaveden pojem třída přesnosti (p).

Pro stanovení třídy přesnosti pro daný typ měřicího přístroje využívá výrobce obvykle následující postup. Při výstupní kontrole se každým přístrojem dané výrobní série měří veličina X_0 (nominální hodnota) definovaná s podstatně větší přesností, než je očekávaná přesnost měřicích přístrojů daného typu. Z celé série naměřených hodnot X_i se stanoví odchylky od nominálního údaje $\Delta X_i = (X_i - X_0)$. Dále se předpokládá, že hodnoty ΔX_i jsou rozloženy v okolí nuly s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti (viz odst. 3.2) v intervalu $(-a, a)$. Hodnota a je jediným parametrem rozdělení a je možno ji odhadnout ze získaného souboru hodnot ΔX_i . Podle principu maximální věrohodnosti (viz kap. 4) je pravděpodobnost nalezení n -tice hodnot ΔX_i v případě rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti maximální, pokud je velikost intervalu $(-a, a)$ minimální. Srovnáme tedy absolutní hodnoty $|\Delta X_i|$ podle velikosti a najdeme maximální hodnotu $|\Delta X_{\max}|$. Minimální možnou velikostí intervalu nejistoty je nyní hodnota $a = |\Delta X_{\max}|$. Dále se při daném rozsahu měřicího přístroje R vypočítá maximální relativní odchylka p v procentech

$$p = \frac{|\Delta X_{\max}|}{R} \cdot 100 (\%) . \quad (2.9)$$

Třídy přesnosti elektromechanických (ručkových) měřicích přístrojů jsou odstupňovány podle kategorií uvedených v tab. 2.1.

Přístroje konkrétně testované výrobní série jsou nyní zařazeny do příslušné kategorie podle hodnoty, která je nejbližší nalezené hodnotě (2.9).

Tab. 2.1.

p	<i>kategorie</i>
0,1	etalony, normály
0,2	cejchovní
0,5	laboratorní
1	laboratorní
1,5	provozní
2,5	provozní

Pro odhad nejistoty typu B se pro přístroje dané třídy přesnosti používá standardní odchylka předpokládaného rovnoměrného rozdělení. Pojem standardní odchylka je zaveden v odstavci 3.3 jako odmocnina z disperze, tedy druhého centrálního momentu náhodné veličiny (3.34). Pro další seznámení s tímto pojmem může čtenář použít i diskuzi v odst. 3.2 a tab. 3.1. V konkrétním případě předpokládaného rovnoměrného rozdělení lze spočítat (viz seminární úloha 3.9), že pro standardní odchylku rovnoměrného rozdělení σ platí

$$\sigma^2 \equiv u_B^2 = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{(2|\Delta X_{\max}|)^2}{12} = \frac{|\Delta X_{\max}|^2}{3}$$

a dále s využitím (2.9)

$$u_B = \frac{p \cdot R}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-2} . \quad (2.10)$$

V intervalu $\pm u_B$ se měřená veličina nachází s pravděpodobností $P \cong 0,58$. Jako příklad uveďme způsob stanovení nejistoty výsledku při měření s ampérmetrem třídy přesnosti $p = 1,5$ na rozsahu $R = 3$ A. Podle (2.10) je odhadem nejistoty typu B

$$u_{B,I} = \frac{1,5 \times 3}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-2} \text{ A} = 0,026 \text{ A} .$$

V některých případech se alternativně předpokládá, že hodnoty X_i mají normální rozdělení se střední hodnotou X_0 . Podobně jako v předchozím případě odhadneme nejistotu typu B standardní odchylkou, v tomto případě normálního rozdělení, veličinou S (viz (4.24))

$$S \equiv u_B = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \Delta X_i^2} . \quad (2.11)$$

Třída přesnosti je podobně jako v předcházejícím případě určena polovinou intervalu, mimo který se měřená veličina prakticky nevyskytuje. V případě normálního rozdělení je tímto intervalem trojnásobek standardní odchylky (viz tab. 3.1). Potom platí

$$p = \frac{3u_B}{R} \cdot 100 (\%) . \quad (2.12)$$

Je-li tedy třída přesnosti stanovená tímto způsobem (s předpokladem normálního rozdělení odchylek ΔX_i), je nutno nejistotu typu B odhadnout vztahem

$$u_B = \frac{pR}{3} \cdot 10^{-2} . \quad (2.13)$$

Rozhodnutí o tom, který způsob pro stanovení nejistoty použijeme, je tedy závislé na informaci výrobce o způsobu stanovení třídy přesnosti. Pokud tato informace není k dispozici, považuje se za obecný postup první a používá se formule (2.10).

Z uvedeného postupu stanovení nejistoty měření je zřejmé, že při měření s ručkovými měřicími přístroji je z důvodů minimalizace relativní nejistoty měření v každém případě nutno měřit v horní polovině stupnice nastaveného rozsahu. K tomu jsou přístroje obvykle vybaveny dostatečnou škálou přepínatelných rozsahů stupnice.

U „solidních“ měřicích přístrojů by třída přesnosti, nebo chyba uváděná výrobcem měla korespondovat s dělením stupnice. Například u přístroje s třídou přesnosti $p = 1$ s předpokládaným rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti je podle (2.10)

$$u_B = \frac{p \cdot R}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-2} = \frac{10^{-2} \cdot R}{\sqrt{3}} . \quad (2.14)$$

Velikost intervalu, ve kterém se veličina nachází s jistotou, je potom

$$\Delta = u_B \sqrt{12} = 2 \cdot 10^{-2} R , \quad (2.15)$$

tedy ± 1 dílek stupnice dělené na 100 dílků. Jemnější dělení stupnice v tomto případě nemá smysl. Podobně v případě přístroje třídy přesnosti $p = 0,5$ je odpovídajícím dělením stupnice na 200 dílků, zatímco v případě $p = 1,5$ stačí dělení stupnice na 60 dílků.

V druhém případě, kdy je možno předpokládat normální rozdělení, je intervalem „statistické jistoty“ (viz tab. 3.1) interval o velikosti $(-3\sigma, 3\sigma)$. V analogii s (2.15) je

$$\Delta = 6u_B = 2 \cdot p \cdot 10^{-2} R , \quad (2.16)$$

což pro přístroj třídy přesnosti $p = 1$ opět odpovídá nejjemnějšímu dělení stupnice na 100 dílků.

Za předpokladu, že při konstrukci stupnice přístrojů dané třídy přesnosti byly dodrženy výše diskutované zásady, je tedy pro přístroje třídy přesnosti $p = 1$ se stupnicí dělenou na sto dílků o velikosti $d = 10^{-2}R$ podle (2.14) $u_B \cong 0,58 d$. V případě přístrojů třídy přesnosti $p = 1,5$ se stupnicí dělenou na 60 dílků tentokrát o velikosti $d = 1,7 \cdot 10^{-2}R$ dostaneme $u_B \cong 0,52 d$. Zobecněním těchto výsledků je možno odhadnout nejistotu měření i u přístrojů, u kterých není známa ani třída přesnosti, ani není k dispozici údaj výrobce. V takových případech odhadneme obvykle

$$u_B \cong 0,5 d , \quad (2.17)$$

kde d je velikost nejjemnějšího dělení stupnice.

Příkladem uvedeného postupu je měření délky klasickým posuvným měřítkem s desetinným noniem (viz níže), tedy s nejjemnějším dělením stupnice $d = 0,1$ mm. Podle (2.17) odhadneme $u_B \cong 0,05$ mm. Je-li měřená délka například v intervalu (3,5–3,6) mm, neprovádíme obvykle další interpolaci a výsledek zapíšeme ve tvaru $a = (3,55 \pm 0,05)$ mm. Moderní posuvná měřítka bývají opatřena digitálním displejem. Nejjemnější dílek dělení displeje (poslední digit) může mít velikost $d = 0,01$ mm. Podle uvedené diskuze by to znamenalo pro odhad nejistoty $u_B \cong 0,005$ mm, což je zřejmě u měřících přístrojů tohoto typu nereálná hodnota. Firma, jejíž měřítko měl autor k dispozici, skutečně uvádí jako

přesnost měření hodnotu $u_B \cong 0,03$ mm, což je hodnota blízka již provedenému odhadu nejistoty měření u měřítka s klasickým noniem. Poslední digit výsledku prezentovaného měřítkem s digitálním odčítáním není tedy v tomto případě směrodatný pro odhad nejistoty měření ve smyslu uvedené diskuze a slouží pouze k pohodlnější interpolaci uvnitř reálného „nejjemnějšího“ dělení stupnice měřítka.

U digitálních měřicích přístrojů, kde je analogová velikost měřené veličiny převedena na číslicový údaj pomocí analogově digitálního (A/D) převodníku, je nejistota výsledku dána principiálně diskrétním charakterem (A/D) charakteristiky. Protože však existuje celá řada dalších faktorů vyplývajících z metody měření a konstrukce přístroje, které mohou být pro nejistotu výsledku dominantní, je pro daný typ měřicího přístroje rozhodující odhad nejistoty (typ B) provedený výrobcem. Pokud není údaj výrobce k dispozici nebo není stanoveno jinak, je pro odhad nejistoty využita diskrétní charakteristika (A/D) převodníku. Zde se předpokládá, že měřená hodnota se s jistotou nachází v mezích daných údajem na displeji (D) a hodnotou ($D + \Delta$), kde Δ je při daném rozsahu měření změna velikosti měřené veličiny odpovídající změně údaje posledního digitu o jedničku. Rozdělení pravděpodobnosti výskytu měřené veličiny v intervalu ($D, D + \Delta$) se, podobně jako výše (viz diskuzi o třídě přesnosti elektromechanických přístrojů), považuje za rovnoměrné. Střední hodnotu měřené veličiny odhadneme hodnotou $D + \Delta/2$, a příslušná nejistota výsledku (typu B) je opět stanovena jako standardní odchylka rovnoměrného rozdělení v intervalu o velikosti Δ , pro kterou platí (srovnej (2.10), popř. seminární úlohu 3.9)

$$\tilde{\sigma} \equiv u_B \cong \frac{\Delta}{2\sqrt{3}} . \quad (2.18)$$

Měřená veličina se v tomto intervalu nachází opět s pravděpodobností $P \cong 0,58$.

Jako příklad k vyloženému postupu uveďme výsledek měření napětí digitálním voltmetrem se čtyřmi digity na rozsahu $R = 5$ V, u kterého není k dispozici údaj o chybě měřicího přístroje. Nechť je na displeji údaj $U = 3,283$ V. Je zřejmé, že v tomto případě je hodnota $\Delta = 0,001$ V. Podle (2.18) vypočteme $u_B \cong 0,0003$ V a výsledek měření uvedeme ve formě $U = (3,2835 \pm 0,0003)$ V.

Pokud by byly odhady přesnosti měřidel provedeny stejným způsobem, pouze s tím rozdílem, že při testování výrobních sérií a všech dalších odhadech by

se místo rozdělení rovnoměrného předpokládalo rozdělení normální (viz (3.16)), je možno snadno ukázat, že výsledné odhady nejistoty u_B by byly významně nižší (srovnej (2.10) a (2.13)). Proto nejsou-li žádné dodatečné informace, ve snaze zajistit maximální možnou objektivitu výsledku se běžně používají formule (2.17), popř. (2.18) založené na rozdělení rovnoměrném.

Užívání uvedených postupů pro odhad nejistoty měřicích přístrojů obsahuje určité nebezpečí v tom, že v některých případech nemusí nejjemnější dělení stupnice (poslední digit) odpovídat třídě přesnosti přístroje. Pokud tedy není k dispozici údaj výrobce, je nutno pravidla (2.17) a (2.18) používat s přiměřenou opatrností.

2.4 ZAOKROUHLOVÁNÍ KONSTANT

V praxi se často setkáváme se situací, kdy je nutno výsledek vlastního měření zahrnout do komplikovanější formule, která obsahuje číselné konstanty známé s vysokou přesností (π , $\sqrt{2}$, e apod.) nebo tabelované fyzikální konstanty (tíhové zrychlení g , gravitační konstantu κ apod.).

V případě číselných konstant je možno najít hodnoty π nebo e uváděné na mnoho desítek platných číslic. Pro konkrétní výpočet pak užíváme vhodně zaokrouhlené hodnoty. Při zaokrouhlování vzniká zaokrouhlovací chyba (o), která je dána rozdílem mezi zaokrouhlenou hodnotou a hodnotou uvedenou v použitých tabulkách. Například při zaokrouhlení čísla π na tři desetinná místa (čtyři platné číslice) máme

$$o_\pi = \pi - 3,141 = 0,0005926535\dots < 0,00060 ,$$

z čehož pro relativní chybu zaokrouhlené hodnoty vyplývá

$$\eta_\pi \cong \frac{6 \cdot 10^{-4}}{\pi} = 1,9 \cdot 10^{-4} .$$

Chceme-li například stanovit objem válce měřením jeho délky L a průměru d , dosazujeme výsledky měření do vzorce

$$V = \pi \frac{d^2}{4} L .$$

Při rozhodnutí o způsobu zaokrouhlení hodnoty π postupujeme obecně podle pravidel diskutovaných v odst. 4.5. Je možno snadno ukázat, že pro relativní nejistotu objemu v tomto případě platí

$$\eta_V^2 = \eta_\pi^2 + 4\eta_d^2 + \eta_L^2 .$$

Jsou-li například relativní nejistoty měření délky a průměru válce řádu 10^{-3} , je z uvedeného vztahu zřejmé, že při uvedení zaokrouhleného tvaru π s relativní nejistotou zaokrouhlení řádu 10^{-4} se chyba zaokrouhlení ve výsledné nejistotě prakticky neprojeví, protože

$$\eta_V^2 = (1,9)^2 \cdot 10^{-8} + 4 \cdot 10^{-6} + 10^{-6} = 5,0361 \cdot 10^{-6} \cong 5 \cdot 10^{-6} .$$

Pokud by byly výsledky měření délky a průměru válce přesnější, je pro výpočet nutno vzít zaokrouhlený tvar π tak, aby relativní nejistota v důsledku zaokrouhlení byla nejméně o řád menší, než relativní nejistoty ostatních hodnot použitých pro výpočet výsledné veličiny. Podobný postup je nutno použít i u jiných číselných konstant, popřípadě i u tabelovaných hodnot konstant fyzikálních.

Chceme-li například stanovit tíhovou sílu působící na těleso hmotnosti m , použijeme známý vztah

$$F = mg .$$

Je-li hmotnost m stanovena s relativní nejistotou η_m , musíme pro výpočet opět použít zaokrouhlenou hodnotu gravitačního zrychlení s relativní nejistotou alespoň o řád menší. Gravitační zrychlení závisí na zeměpisné šířce φ podle mezinárodně uznávané formule (viz např. [11], str. 514 a 515)

$$g(\varphi) = 9,78049(1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin^2 2\varphi)$$

platné pro zeměkouli jako rotační elipsoid. Gravitační zrychlení závisí dále na nadmořské výšce h a zeměpisné délce λ . Konkrétní měření udávají např. pro různá místa v západní a střední Evropě v okolí $\varphi = 50^\circ$ severní šířky hodnoty uvedené v tab. 2.2. Je tedy vidět, že použijeme-li např. v Praze pro hodnotu gravitačního zrychlení zaokrouhlení

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2} ,$$

je tato hodnota zatížena relativní zaokrouhlovací nejistotou

$$\eta_g = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{g} \cong 5,1 \cdot 10^{-5} ,$$

Tab. 2.2

Místo	λ (°)	φ (°)	h (m)	g (ms ⁻²)
Aachen	6.08	50.78	179	9.811 1
Bonn	7.10	50.73	62	9.811 22
Drážd'any	13.73	51.06	121	9.811 28
Praha	14.4	50.09	200	9.810 5
Brno	16.6	49.21		9.809 61
Budapešť	19.09	47.48	108	9.808 52

což podle výše uvedené zásady vyhovuje hmotnosti stanovené s relativní nejistotou $5 \cdot 10^{-4}$ a horší.

3. VYBRANÉ ZÁKLADNÍ POJMY MATEMATICKÉ STATISTIKY

Fyzikální měření se vždy provádějí za určitých podmínek. Podmínky konkrétního experimentu a celá řada ostatních okolností tvoří soubor okolností, které mohou výsledek měření určit jednoznačně nebo nejednoznačně. V prvním případě, hovoříme o deterministických schématech, kdy s daným komplexem okolností nutně nastane vždy tentýž výsledek. V případě druhém jde o schémata stochastická a výsledek měření je pak jevem náhodným. Obecně se při studiu přírodních jevů snažíme o co nejobsáhlejší komplex okolností. Se zdokonalováním experimentální techniky se může stát, že jevy, které byly s určitým systémem okolností jevy stochastickými, se vůči jinému, dokonalejšímu systému okolností stávají jevy determinovanými.

S rozvojem poznání, ve snaze o mikroskopickou interpretaci makroskopických dat se v řadě případů původně deterministická schémata stávají nutně stochastickými. Příkladem může být problém stanovení tlaku ideálního plynu v daném objemu a při dané teplotě. Fenomenologická stavová rovnice má deterministický charakter. Známe-li množství plynu, objem nádoby a teplotu, je tlak vždy týž. Na druhé straně při mikroskopické interpretaci stavových veličin formalizmem kinetické teorie plynu by soubor okolností musel pro deterministický popis obsahovat informace o poloze a rychlostech jednotlivých molekul daného množství plynu, což je požadavek nereálný, a proto má v tomto případě problém výrazně stochastický charakter a musí se řešit metodami matematické statistiky. Statistické zpracování potom poskytuje charakteristiky stochastického souboru, které jsou makroskopicky verifikovatelné. V uvedeném případě je tlak interpretován jako časová změna hybnosti molekul narážejících v každém okamžiku na jednotku plochy stěny nádoby. Je zřejmé, že tato veličina fluktuuje jak v čase, tak i místně. Pokud bychom dokázali měřit hodnoty tlaku v časových intervalech podstatně kratších, než je střední doba mezi srážkami jednotlivých molekul se stěnou nádoby, dostali bychom posloupnost různých výsledků, které by se s určitým rozptylem pohybovaly v okolí střední hodnoty. Nalezení této střední hodnoty a stanovení charakteristiky rozptylu měřené veličiny v jejím okolí je zde základní úlohou statistického zpracování stochastického

jevu. V konkrétním případě studia tlaku plynu se měření provádí vždy za podstatně delší časový interval, než je střední doba mezi jednotlivými srážkami a je zřejmé, že statisticky stanovená střední hodnota musí být rovna hodnotě měřené a je tedy onou hledanou verifikovatelnou charakteristikou stochastického souboru molekul ideálního plynu.

V případě fyzikálních měření je soubor okolností relevantních pro výsledek ve většině případů natolik rozsáhlý, že jej nelze detailně popsat, a proto jsou fyzikální měření děje, které se řídí schématy stochastickými. Pro zpracování výsledků fyzikálních měření (zatížených statistickými fluktuacemi) je proto nutno použít metody matematické statistiky. Bez nároků na úplnost jsou dále zavedeny potřebné pojmy a diskutovány některé jejich vlastnosti. Zavedení každého pojmu je ilustrováno jednoduchým příkladem.

3.1 STATISTICKÝ EXPERIMENT, NÁHODNÝ JEV, PRAVDĚPODOBNOST

Statistický experiment (E), je definován předpisem, který specifikuje množinu možných výsledků experimentu $\{V_E\}$. Pro každý z výsledků (v) experimentu platí $v \in \{V_E\}$. Uveďme dále dva z nejjednodušších příkladů statistických experimentů. Prvním z nich je běžná hrací kostka ve tvaru krychle. Tento experiment se bude v dalším textu jako příklad často používat. Předpis, kterým se obvykle definuje nejběžnější experiment s hrací kostkou, specifikuje množinu výsledků jako množinu obrazců, které se objeví na horní ploše kostky po hodů a zastavení kostky na vodorovné hrací ploše. Předpis by mohl například stanovit i jinou množinu obrazců, například množinu obrazců na spodní straně kostky, na plochách obrácených po zastavení kostky v určitém intervalu směrů apod. V prvním, nejběžnějším případě, který budeme dále vždy používat, je

$$\{V_E\} \equiv \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline \end{array} \right\} .$$

množinou výsledků experimentu množina známých obrazců s charakteristickým uspořádáním jednoho až šesti bodů.

Dalším charakteristickým experimentem je vážení. Výsledkem experimentu vážení bude například součet hmotností všech závaží na misce vah při vyrovnaných vahách, tedy číslo z množiny (intervalu)

$$\{V_E\} \equiv (0, \infty).$$

Poznamenejme, že definice experimentu pouze požaduje, aby výsledek experimentu v byl prvkem množiny výsledků ($v \in \{V_E\}$), nikoliv aby každý prvek množiny $\{V_E\}$ nastal.

Na statistickém experimentu, který má neprázdnou množinu výsledků, je možno definovat náhodný jev (A_E), který je určen vybranou množinou („pozitivních“) výsledků experimentu. Jako příklad je možno uvést jevy na experimentu s hrací kostkou. Každý z jevů vybraných příkladů nastane tehdy, je-li výsledkem experimentu některý z výsledků spadající do vybraných množin.

$$A_E \equiv \left\{ \left[\begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \right] \right\}, \quad B_E \equiv \left\{ \left[\begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \right] \left[\begin{array}{|c|} \hline \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \\ \hline \end{array} \right] \right\}.$$

Na množině možných výsledků $\{V_E\}$ experimentu E je možno dále definovat náhodnou proměnnou x_E , která je opět určena pravidlem, které každému výsledku experimentu přiřazuje číslo jako hodnotu náhodné proměnné. V našem příkladu s hrací kostkou je možno náhodnou proměnnou definovat nejjednodušším způsobem jako počet bodů na obrazcích, které jsou výsledkem experimentu. Množinou hodnot náhodné proměnné je potom množina celých čísel $x_E \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. V tomto případě hovoříme o diskrétní náhodné proměnné. V druhém uvedeném případě vážení mají již výsledky experimentu číselnou formu a množina hodnot náhodné proměnné je v tomto případě spojitá.

Speciálním typem experimentu je tzv. experiment typu náhodný výběr (N). Množina výsledků takového experimentu je konečná a realizace žádného výsledku není proti ostatním upřednostněna. V našich příkladech je opět experiment s hrací kostkou klasickým experimentem typu náhodný výběr. V případě vážení není množina výsledků konečná a jsou v ní výrazně upřednostněny výsledky v malém okolí reálné hmotnosti váženého tělesa.

Je-li na nějakém experimentu E definován náhodný jev A_E , potom je možno definovat i jev opačný ($\text{non } A_E$), jehož množinu výsledků (hodnot náhodné proměnné) tvoří všechny možné výsledky kromě výsledků, které jsou pro jev A_E pozitivní.

Máme-li na experimentu E definováno několik jevů A_E^i , je možno základními množinovými operacemi definovat i jev sjednocení

$$\bigcup_i A_E^i$$

těchto jevů množinou výsledků pozitivních alespoň pro jeden z nich. Podobně je možno definovat i jev průnik jevů A_E^i

$$\bigcap_i A_E^i$$

jako jev, jehož množina výsledků je tvořena výsledky experimentu, z nichž každý je pozitivní pro všechny jevy A_E^i . Je-li speciálně

$$A_E^i \bigcap_{i \neq j} A_E^j \equiv \emptyset ,$$

tedy průnikem všech různých jevů A_E^i , A_E^j jsou prázdné množiny, hovoříme o jevech navzájem disjunktních.

V případě experimentů typu náhodný výběr (N) je možno snadno definovat pravděpodobnost jevu A_N (p_{A_N}) jako počet prvků množiny výsledků experimentu N pro jev A_N pozitivních n_{A_N} redukovaný celkovým počtem možných výsledků experimentu n_N , tedy

$$p_{A_N} = \frac{n_{A_N}}{n_N} . \quad (3.1)$$

Takto definovaná pravděpodobnost má pro dva jevy A_N a B_N na experimentu N následující vlastnosti

1. $p_{A_N}, p_{B_N} \geq 0$
2. $p_{N_N} = 1$
3. $p_{A_N \cup B_N} = p_{A_N} + p_{B_N} - p_{A_N \cap B_N}$.

Symbolem N_N je zde označen jev na experimentu N, jehož pozitivními výsledky jsou všechny možné výsledky experimentu N. Například v případě experimentu s hrací kostkou, definujeme-li jevy A_N a B_N množinami pozitivních výsledků $A_N \equiv \{1,3,5\}$, $B_N \equiv \{2,3,5,6\}$, jsou odpovídající pravděpodobnosti

$$p_{A_N} = \frac{1}{2}, \quad p_{B_N} = \frac{2}{3}, \quad p_{A_N \cup B_N} = \frac{5}{6}, \quad p_{A_N \cap B_N} = \frac{1}{3}$$

a všechny požadované vlastnosti jsou splněny. Čísla určující pravděpodobnost uvedeným způsobem jsou tzv. redukované velikosti podmnožin pozitivních výsledků. Výše uvedené požadavky ad 1. až ad 3., které jsou pro definici pravděpodobnosti obecné, je možno jednoduše použít pro stanovení pravděpodobnosti jevu opačného. Protože podle definice platí

$$A_N \cup \text{non } A_N = N_N$$

a zároveň

$$A_N \cap \text{non } A_N = \emptyset,$$

je možno použitím třetího z výše uvedených požadavků na pravděpodobnost snadno ukázat

$$p_{\text{non } A_N} = 1 - p_{A_N}. \quad (3.2)$$

Redukované velikosti podmnožin pozitivních výsledků je možno jednoduše použít pro stanovení pravděpodobnosti i u experimentů typu náhodný výběr, jejichž množina výsledků je spojitá. V obecnějším případě je definice pravděpodobnosti poměrně komplikovaným problémem obecné teorie míry a je mimo rámec tohoto úvodního textu se s touto problematikou podrobněji zabývat. Zájemce je možno odkázat na specializované učebnice, např. [12], [13], [14].

Mějme dále experimenty E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) definované svými množinami možných výsledků $\{V_{E_i}\}$. Definujme experiment $E \equiv E_1 \cdot E_2 \dots E_n$, který má za množinu výsledků $\{V_E\}$ kartézský součin množin výsledků experimentů E_i

$$\{V_E\} \equiv \{V_{E_1}\} \times \{V_{E_2}\} \times \dots \times \{V_{E_n}\}.$$

Experiment E nazýváme spojením experimentů E_i . Jako příklad je možno opět uvést experiment s hrací kostkou. Při současném použití dvou kostek, tedy experimentu typu $N \equiv N_1 \cdot N_2$ je množina možných výsledků dána uspořádanými dvojicemi čísel

$$\{V_N\} \equiv \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (6,6)\}.$$

V souvislosti s pojmem spojení experimentů se dále zavádí pojem experimentů nezávislých. Nezávislými experimenty jsou takové experimenty, u nichž provedení jednoho neovlivní provedení druhého, neboli žádný výsledek jevu jednoho neovlivní výsledky jevu druhého. Jsou-li na experimentech E_i definovány jevy A_{E_i} (opět množinou pozitivních výsledků), je možné na

spojení experimentů E definovat jev A , jehož množina výsledků je opět kartézským součinem množin výsledků pozitivních pro jednotlivé jevy A_{E_i}

$$\{V_A\} \equiv \{V_{A_1}\} \times \{V_{A_2}\} \times \dots \times \{V_{A_n}\} .$$

Jsou-li experimenty E_i nezávislé, nezávisí ani pravděpodobnosti jednotlivých jevů A_{E_i} na realizaci jevů ostatních. Jako příklad spojení experimentů vyberme opět současně užití dvou hracích kostek. Nechť je na první z nich definován jev $A_{N_1}^1 \equiv \{1,3\}$ a na druhé $A_{N_2}^2 \equiv \{2,3,6\}$. Množina pozitivních výsledků jevu $A = A_{N_1}^1 \cdot A_{N_2}^2$ na spojení experimentů $N_1 \cdot N_2$ bude mít zřejmě 6 prvků

$$\{V_A\} \equiv \{(1,2), (1,3), (1,6), (3,2), (3,3), (3,6)\}$$

a pravděpodobnost jevu A bude

$$p_A = \frac{6}{36} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = p_{A_{N_1}^1} \cdot p_{A_{N_2}^2} .$$

Tento výsledek platí ovšem v případě spojení nezávislých jevů, tedy spojení jevů $A_{E_i}^i$ definovaných na nezávislých experimentech E_i , obecně

$$p_A = \prod_i p_{A_{E_i}^i} . \quad (3.3)$$

Pojem spojení experimentů není závislý na časové posloupnosti jejich provedení. Proto je možno definovat i experiment E^n , který spočívá v n násobném opakování jediného experimentu E . Množinou výsledků experimentu E^n je n násobný kartézský součin množin výsledků $\{V_E\}$ experimentu E , takže

$$\{V_{E^n}\} \equiv (\{V_E\} \times \{V_E\} \times \dots \times \{V_E\})_n .$$

Je-li na experimentu E definován jev A_E s množinou výsledků $\{V_A\}$, potom jev A_{E^n} na opakování experimentu E^n

$$A_{E^n} \equiv (A_E \cdot A_E \cdot \dots \cdot A_E)_n$$

je definován obdobně jako jev na spojení experimentů n -násobným kartézským součinem množiny výsledků jevu A , tedy množinou výsledků

$$\{V_{A_{E^n}}\} \equiv (\{V_{A_E}\} \times \{V_{A_E}\} \times \dots \times \{V_{A_E}\})_n .$$

Jsou-li opakování nezávislá, je pravděpodobnost jevu na opakování experimentu $p_{A_E^n}$ podle (3.3)

$$p_{A_E^n} = (p_{A_E})^n .$$

Pojmu jevu na nezávislém opakování experimentu je možno využít k alternativní definici pravděpodobnosti. Nechť je na experimentu E definován jev A_E . Při n násobném nezávislém opakování experimentu E nechť jev A_E nastane n_A krát. Poměr

$$p'_A = \frac{n_A}{n} \quad (3.4)$$

nazýváme relativní četností jevu A. Pravděpodobnost jevu A je potom definována jako limita relativní četnosti při objemu nezávislých opakování rostoucímu nad všechny meze

$$p_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_A}{n} \right) . \quad (3.5)$$

Tento způsob zavedení pravděpodobnosti jako limity relativní četnosti stejně jako výše zmíněný postup využívající teorie míry, jakkoliv jsou intuitivně pochopitelné, vyžadují samozřejmě podrobnější diskusi, která však přesahuje rámec tohoto textu. Proto zde pouze odkazujeme na specializovanou literaturu, například na již zmíněné knihy [12], [13], [14].

3.2 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOTI, DISTRIBUČNÍ FUNKCE

Rozdělením pravděpodobnosti nazýváme předpis (funkci), který hodnotám náhodné proměnné přiřazuje jejich pravděpodobnost. Konstrukce rozdělení pravděpodobnosti a jeho vlastnosti se principiálně liší podle toho, zda je náhodná veličina veličinou diskrétní či spojitou. V případě diskrétních náhodných proměnných jsou hodnotám náhodné proměnné skutečně přiřazeny jejich pravděpodobnosti, zatímco v případě spojitých náhodných veličin se rozdělením

pravděpodobnosti často označuje tzv. hustota pravděpodobnosti zavedená dále vztahem (3.11). Tato terminologická nejednoznačnost je však natolik vžitá, že i v tomto textu budeme předpokládat, že čtenář potřebný rozdíl ve významu snadno nahlédne z kontextu.

Uvažujme tedy nejprve rozdělení pravděpodobnosti pro případ diskrétní náhodné proměnné. Jednotlivé diskrétní hodnoty náhodné proměnné označíme x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), kde n je celkový počet hodnot náhodné proměnné na daném experimentu. Jevy spočívající v realizaci jednotlivých hodnot náhodné proměnné necht' mají pravděpodobnost p_{x_i} . Jevy jsou disjunktní a jejich sjednocením je celá množina možných výsledků experimentu. Potom podle výše uvedených vlastností pravděpodobnosti platí

$$\sum_{i=1}^n p_{x_i} = 1 . \quad (3.6)$$

Tento vztah bývá nazýván normovací podmínkou a může být v řadě případů použit pro stanovení konkrétního tvaru rozdělení pravděpodobnosti. V případě, že pravděpodobnost realizace všech hodnot náhodné proměnné je stejná, hovoříme o rozdělení rovnoměrném. V tomto případě platí $p_{x_i} = p$ a užitím normovací podmínky (3.6) dostáváme

$$\sum_{i=1}^n p = 1 \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{n} . \quad (3.7)$$

Obecně jsou tímto rozdělením popsány náhodné veličiny v experimentech typu náhodný výběr. V našem často užívaném příkladu hrací kostky je $n = 6$.

Dalším klasickým diskrétním rozdělením je rozdělení binomické. Binomické rozdělení přiřazuje hodnoty pravděpodobnosti diskrétní náhodné proměnné k , která odpovídá počtu realizací jevu A_E na experimentu E při N -násobném nezávislém opakování experimentu. Pravděpodobnost jevu A_E necht' je p_{A_E} . Proměnná k zřejmě může nabývat hodnot $k = (0, 1, 2, \dots, N)$ a ptáme se tedy, s jakou pravděpodobností se každá z těchto hodnot realizuje. Pravděpodobnost $P_{p_{A_E}, N}(k)$, že při konkrétním N -násobném nezávislém opakování experimentu

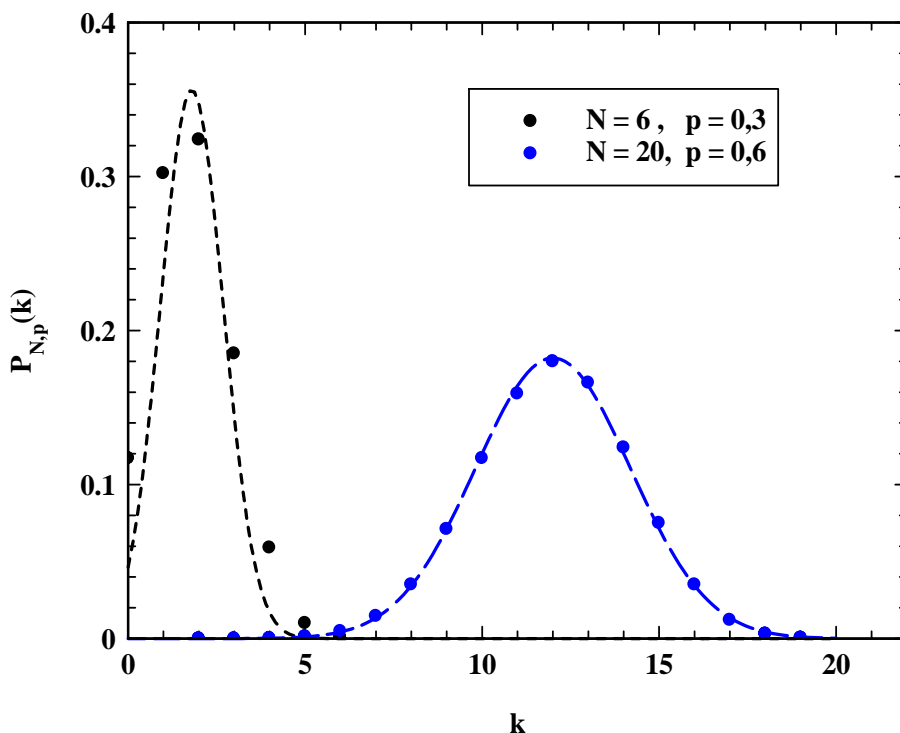
E jev A_E k -krát nastane a zároveň $(N - k)$ -krát nenastane, je podle pravidla (3.3) úměrná součinu

$$P_{p_{A_E}, N}(k) = C_{N, k} p_{A_E}^k (1 - p_{A_E})^{N-k} .$$

Konstanta úměrnosti $C_{N, k}$ vyjadřuje skutečnost, že požadovaná konkrétní hodnota náhodné proměnné k se při N -násobném opakování experimentu může realizovat $\binom{N}{k}$ různými způsoby a je možno snadno ukázat, že je skutečně rovna tomuto kombinačnímu číslu. Výsledné rozdělení má potom tvar

$$P_{p_{A_E}, N}(k) = \binom{N}{k} p_{A_E}^k (1 - p_{A_E})^{N-k} . \quad (3.8)$$

Obr. 3.1 Binomické rozdělení pro různé hodnoty N a p



Binomické rozdělení pro vybrané různé hodnoty N a p je znázorněno na obr. 3.1. Čárkované křivky znázorňují pro srovnání průběhy normálního rozdělení (viz

dále) s parametry, které odpovídají střední hodnotě a disperzi binomického rozdělení pro dané hodnoty N a p (viz dále odst. 3.3). Dále se snadno přesvědčíme (například jednoduchým užitím binomické věty), že normovací podmínka (3.6) je splněna a že skutečně platí

$$\sum_{k=0}^N P_{p, N} (k) = 1 .$$

Vedle rozdělení binomického se často používá i další z diskrétních rozdělení, rozdělení Poissonovo. Toto rozdělení se používá například v jaderné fyzice pro statistiku emisí při jaderném rozpadu (např. pro účely stanovení vlastností zářiče) nebo i pro statistiku tiskových chyb (překlepů), je-li zapotřebí charakterizovat kvalitu práce písaře. Pro nalezení konkrétního tvaru rozdělení uvažujeme tedy rozdělení pravděpodobnosti počtu výskytů náhodné události (k), kde ($k = 0, 1, 2, \dots$), např. emise γ -kvanta v určitém časovém intervalu nebo počtu chyb (překlepů) v určitém úseku textu. Rozdělení odvodíme za následujících předpokladů

- i) jednotlivé realizace náhodné události jsou navzájem nezávislé,
- ii) pravděpodobnost realizace události v malém intervalu $P(t, t + dt)$ je úměrná velikosti tohoto intervalu, např. $P(t, t + dt) = \mu dt$,
- iii) pravděpodobnost současné realizace (též místně) dvou událostí je nulová.

Nechť $P_k(t)$ je pravděpodobnost, že daná událost (emise γ -kvanta) nastane v časovém intervalu $(0, t)$ k -krát. Nenastala-li v intervalu $(0, t)$ žádná událost (pravděpodobnost $P_0(t)$), potom pravděpodobnost, že ani v intervalu $(0, t + dt)$ nenastane žádná událost je dána vztahem

$$P_0(t + dt) = P_0(t) (1 - \mu dt)$$

Z toho

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\mu P_0(t) \quad \Rightarrow \quad P_0(t) = C \exp(-\mu t)$$

Konstantu C určíme snadno z okrajové podmínky, která požaduje, aby v nulovém intervalu nenastala žádná událost

$$t \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad P_0(0) \rightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1 .$$

Potom

$$P_0(t) = \exp(-\mu t) .$$

V dalším postupu hledáme pravděpodobnost, že v intervalu $(0, t + dt)$ nastane jedna událost. Tento jev je sjednocením dvou disjunktních jevů. V prvním nastane požadovaná jedna událost v intervalu $(0, t)$, zatímco v následujícím intervalu $(t, t + dt)$ žádná událost nenastane, ve druhém případě naopak v intervalu $(0, t)$ událost nenastane a v následujícím intervalu $(t, t + dt)$ událost nastane (jednou). Výsledná pravděpodobnost je potom dána vztahem

$$P_1(t + dt) = P_1(t) (1 - \mu dt) + P_0(t) \mu dt .$$

Odtud

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1(t) + \mu P_0(t) . \quad (3.9)$$

Řešením této diferenciální rovnice je pravděpodobnost

$$P_1(t) = \mu t \exp(-\mu t) .$$

V dalším kroku máme obdobně

$$P_2(t + dt) = P_2(t) (1 - \mu dt) + P_1(t) \mu dt ,$$

což vede na diferenciální rovnici obdobnou rovnici (3.9.)

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\mu P_2(t) + \mu P_1(t) ,$$

jejímž řešením je tentokrát pravděpodobnost

$$P_2(t) = \frac{(\mu t)^2}{2} \exp(-\mu t) .$$

V analogii s uvedenými případy pro jednu a dvě události v čase $(0, t + dt)$ platí zřejmě pro obecných k událostí diferenciální rovnice

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\mu P_k(t) + \mu P_{k-1}(t) .$$

Snadno se lze přesvědčit, že řešením této rovnice je funkce

$$P_k(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} \exp(-\mu t) .$$

Nakonec prověříme normovací podmínku

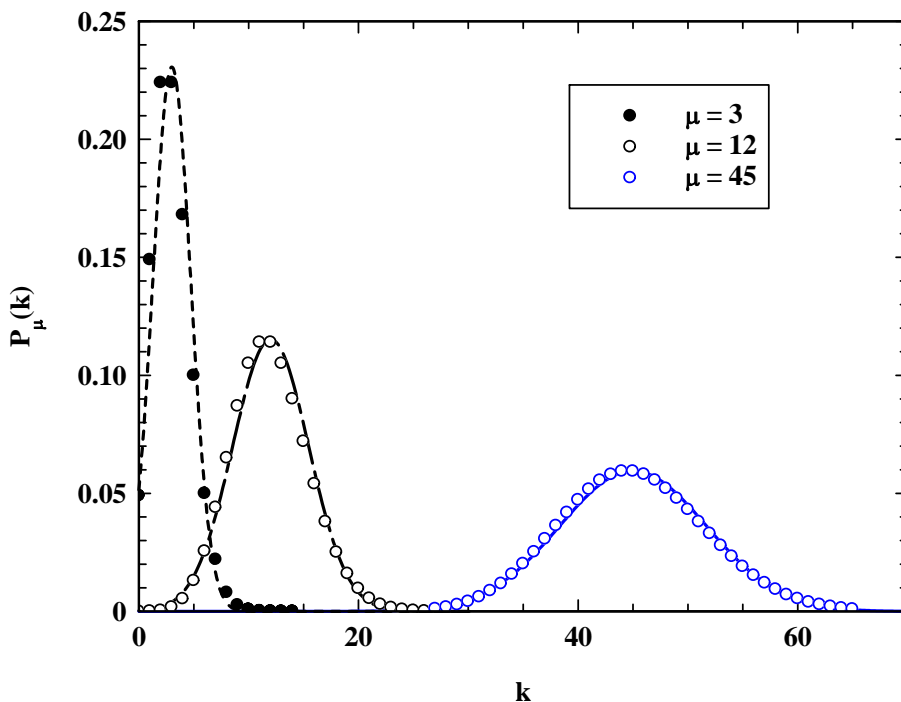
$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(t) = e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} = e^{-\mu t} e^{\mu t} = 1 .$$

Jak již bylo řečeno, je časový interval $(0, t)$ libovolný nejen co do velikosti, ale i co do charakteru. Proto je obvyklé volit interval jednotkový. Rozdělení má potom obecně užívaný tvar

$$P(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad (3.10)$$

kde veličina μ má význam pravděpodobnosti realizace události v jednotkovém intervalu, například za sekundu, nebo na stránce textu. Příklad tvaru Poissonova rozdělení pro různé hodnoty parametru μ je uveden na obr. 3.2. Pro srovnání jsou čárkovaně uvedeny průběhy normálního rozdělení (viz níže) se střední hodnotou a disperzí odpovídající příslušným hodnotám parametru μ (viz odst. 3.3)

Obr. 3.2 Poissonovo rozdělení pro různé hodnoty parametru μ



Je-li spojitá náhodná proměnná definována v intervalu (a,b) , je rozdělením pravděpodobnosti $p(x)$ definována pravděpodobnost $P(x, x + dx)$, že se náhodná proměnná nachází právě ve vyznačeném intervalu $(x, x + dx)$

$$P(x, x + dx) = p(x) dx \quad (3.11)$$

Pravděpodobnost $P(x, x + dx)$ je úměrná velikosti intervalu dx a funkci $p(x)$ nazýváme hustotou pravděpodobnosti. Normovací podmínka (3.6) má potom tvar

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad (3.12)$$

Podobně jako v případě diskrétních rozdělení je nejjednodušším typem rozdělení spojitých rozdělení rovnoměrné. V tomto případě je pravděpodobnost výskytu náhodné veličiny x v libovolném intervalu stejná, tedy na x nezávislá. Například pro rovnoměrné rozdělení náhodné veličiny v intervalu (a, b) potom platí

$$P(x, x + dx) = p dx \quad .$$

Konstantu p v tomto případě snadno určíme z normovací podmínky (3.12)

$$\int_a^b p dx = p(b - a) = 1$$

a hustota pravděpodobnosti má potom tvar

$$p = \frac{1}{b - a} \quad (3.13)$$

Příkladem rozdělení pravděpodobnosti, které je možno odvodit z rozdělení rovnoměrného transformací souřadnic, je rozdělení Cauchyho. Představme si rovnoměrně se otáčející dělo, které v úhlovém intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ náhodně střílí (obr. 3.3), přičemž pravděpodobnost výstřelu na úhlu φ nezávisí. Rozdělení pravděpodobnosti v proměnné φ je tedy rovnoměrné

$$p(\varphi) = p \quad .$$

S využitím normovací podmínky

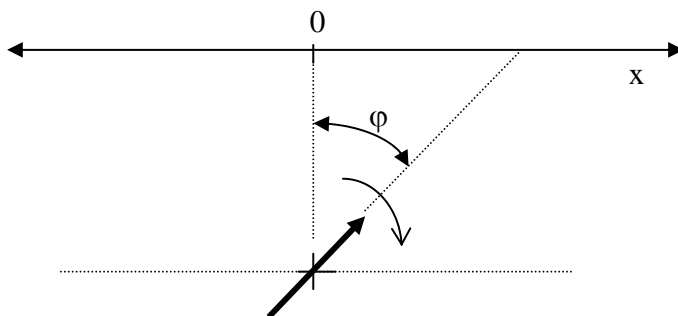
$$1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(\varphi) d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p d\varphi = p \pi$$

dostaneme v tomto případě analogicky k (3.13)

$$p = \frac{1}{\pi} . \quad (3.14)$$

Nyní nás zajímá, jaké je rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ zásahu na cílové přímce (obr. 3.3), která je v jednotkové vzdálenosti od otáčejícího se děla (jevy spo-

Obr. 3.3. K výkladu odvození Cauchyho rozdělení



jené s konečnou rychlostí a eventuální balistickou dráhou střely neuvažujeme).

Platí

$$\operatorname{tg}(\varphi) = x \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(x) \rightarrow d\varphi = \frac{1}{(1+x^2)} dx .$$

Potom

$$p(\varphi)d\varphi = p d\varphi = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)} dx = p(x) dx .$$

Hustota pravděpodobnosti zásahu na přímce x je tedy popsána funkcí

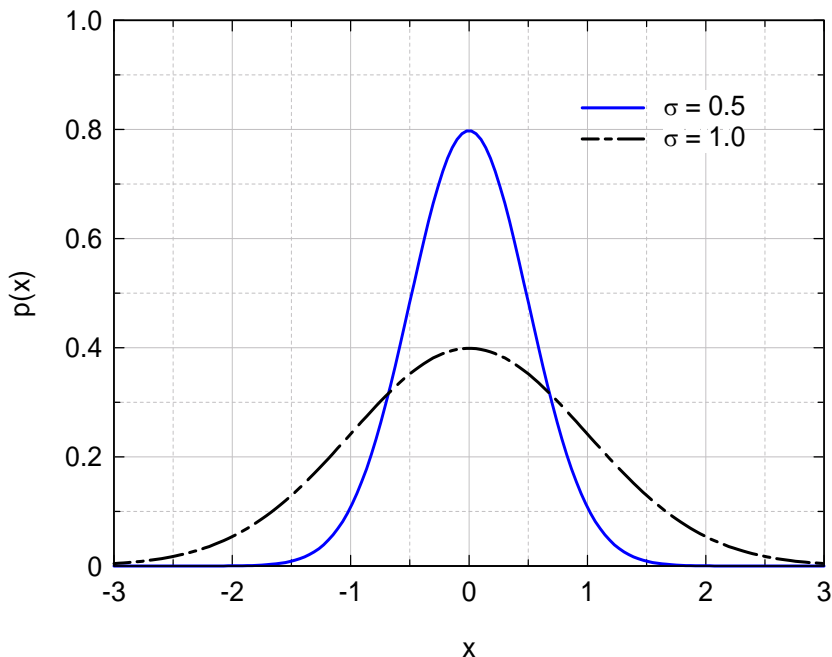
$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)} , \quad (3.15)$$

což je hledaný tvar Cauchyho rozdělení.

Základním statistickým rozdělením je „normální (Gaussovo) rozdělení“. Rozdělení popisuje hustotu pravděpodobnosti výskytu spojité náhodné proměnné x v intervalu $x \in (-\infty, \infty)$ ve tvaru

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \quad (3.16)$$

Obr. 3.4 Normální rozdělení



Rozdělení pravděpodobnosti má dva parametry. Parametr μ udává polohu rozdělení na ose x a později bude ukázáno, že je totožný se střední hodnotou náhodné veličiny x . Parametr σ^2 se nazývá disperze, (variance, rozptyl) náhodné proměnné. Odmocnina z disperze σ charakterisuje šířku rozdělení a nazývá se standardní odchylkou. Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení (3.16) bývá v některých případech označována symbolem

$$N_x(\mu, \sigma) .$$

Index x označující veličinu, o jejíž rozdělení pravděpodobnosti jde, se někdy vynechává. Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení (3.16) je pro $\mu = 0$ a dvě různé hodnoty $\sigma = 0,5$ a $\sigma = 1,0$ znázorněna na obrázku (3.4).

Uvažujme dále s jakou pravděpodobností se veličina popsaná normálním rozdělením vyskytuje v oblastech kolem střední hodnoty charakterizovaných různými hodnotami standardní odchylky. K tomu účelu vypočítáme integrály

$$P(\mu - a, \mu + a) = \int_{\mu - a}^{\mu + a} p(x) dx$$

pro různé hodnoty a . Výsledky jsou shrnuty v tabulce 3.1.

Tab. 3.1

$P(\mu - a, \mu + a)$	a
0,5	$2\sigma/3$
0,683	σ
0,955	2σ
0,997	3σ

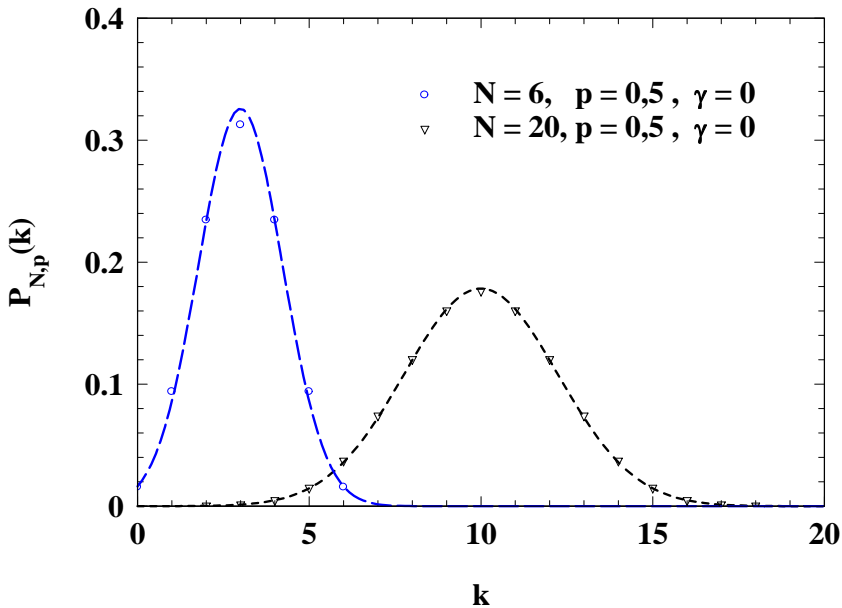
S využitím náročnějšího aparátu matematické statistiky (viz např. [12]) je možno ukázat, že diskutovaná diskrétní rozdělení, rozdělení binomické a Poissonovo, konvergují s růstem středních hodnot k „diskrétní aproximaci“ normálního rozdělení (3.16) ve tvaru

$$p(k) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}},$$

kde $k = (1, 2, \dots)$, μ_k a σ_k jsou střední hodnota a standardní odchylka (viz seminární úlohy (3.4), (3.6)). V případě binomického rozdělení roste střední hodnota při daném p s růstem N , v případě Poissonova rozdělení roste střední hodnota s růstem parametru μ . Situaci je možno posoudit využitím obrázků 3.1, 3.2 nebo pomocí tzv. parametru asymetrie γ zavedeného vztahem (3.37) (viz dále odst. 3.3). V případě binomického rozdělení na obr. 3.1 je vidět, že jeho tvar je už pro nepříliš vysoké střední hodnoty (Np) velice blízký tvaru rozdělení normálního. V případě rozdělení Poissonova (obr. 3.2) je zřejmě konvergence k diskrétní aproximaci normálního rozdělení podstatně pomalejší.

Parametr asymetrie γ je v případě binomického rozdělení dán vztahem (viz seminární úlohu 3.5)

Obr. 3.5 K výkladu konvergence binomického rozdělení



$$\gamma = \frac{(1-2p)}{\sqrt{Np(1-p)}} .$$

Pro Poissonovo rozdělení je podobně možno vypočítat (viz seminární úlohu 3.7)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

V obou případech tedy parametry asymetrie s růstem střední hodnoty konvergují k nule, což znamená, že rozdělení se stávají, podobně jako rozdělení normální, symetrickými vůči střední hodnotě (viz dále odst. 3.3.). Podmínka nulové hodnoty parametru asymetrie ovšem není pro proces konvergence podmínkou postačující, což je vidět z výše uvedeného vztahu pro asymetrii binomického rozdělení, která nabývá nulové hodnoty i v případě $p = 1/2$ bez ohledu na velikost střední hodnoty. Situace je znázorněna na obr. 3.5, kde jsou podobně jako na obr. 3.1. uvedeny průběhy binomického rozdělení s parametrem $p = 1/2$ pro různé střední hodnoty μ a zároveň průběhy normálního rozdělení s odpovídajícími hodnotami parametrů μ a σ . Je vidět, že přestože jsou příslušná binomická rozdělení symetrická kolem střední hodnoty, je pro proces konvergence k výše

uvedené diskrétní aproximaci normálního rozdělení zapotřebí odpovídající růst střední hodnoty.

Vedle normálního rozdělení je dalším z významných statistických rozdělení tzv. rozdělení χ^2 (chí-kvadrát). Rozdělení χ^2 je rozdělením sumy čtverců náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0,1)$, tedy rozdělením s nulovou střední hodnotou a jednotkovou disperzí, při ν -násobném nezávislém opakování. Rozdělení má řadu vlastností použitelných v různých oblastech teorie i v praktických úlohách matematické statistiky. Označíme-li náhodnou veličinu jako u , má veličina χ^2 tvar

$$\chi_\nu^2 = \sum_{i=1}^{\nu} u_i^2 \quad . \quad (3.17)$$

Veličina χ^2 je náhodnou veličinou a je popsána statistickým rozdělením, jehož hustota pravděpodobnosti má tvar (viz např. [15], [16])

$$p_\nu(\chi_\nu^2) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} (\chi_\nu^2)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\chi_\nu^2}{2}} \quad . \quad (3.18)$$

Rozdělení má jediný parametr ν , který se nazývá počet stupňů volnosti. Funkce Γ (Γ -funkce), která zavádí obecné vyjádření faktoriálu pro obor komplexních čísel, má tvar

$$z! \equiv \Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt$$

a je definována pro všechna komplexní z s výjimkou celých záporných čísel, tedy $(-1, -2, -3, \dots)$. Střední hodnota náhodné veličiny χ^2 a její disperze (viz dále definici v odst.3.3 a podrobnější diskuzi například v knihách [15], [16]) jsou v tomto případě

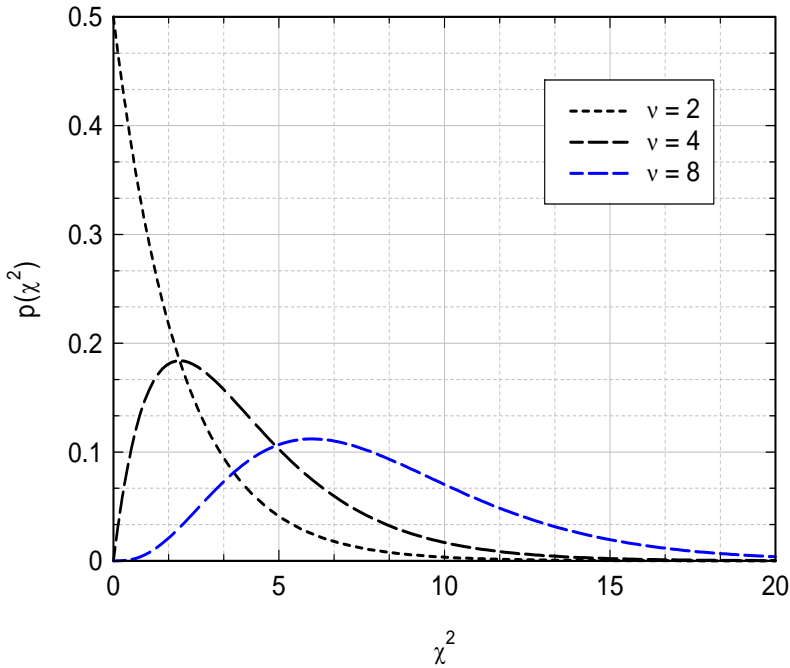
$$\langle \chi^2 \rangle = \nu, \quad D_{\chi^2} = \langle (\chi^2 - \nu)^2 \rangle = 2\nu \quad . \quad (3.19)$$

Pro malé hodnoty ν je rozdělení silně asymetrické. Pro vyšší počty stupňů volnosti je však možno ukázat, že rozdělení normované veličiny

$$\frac{\chi^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}}$$

přechází v rozdělení normální $N(0, 1)$ (viz např. obr. 3.6. a [16]).

Obr. 3.6 Rozdělení χ^2 pro různé počty stupňů volnosti



Nakonec ještě uvedme tzv. t-rozdělení (Studentovo). Přestože jsou jak postup zavedení, tak i výsledná forma rozdělení na první pohled poněkud komplikované, ukážeme v dalším textu (kap. 4) význam t-rozdělení v oblasti testování hypotéz.

Studentovo rozdělení je rozdělením náhodné veličiny, kterou získáme jako poměr dvou náhodných veličin. První z nich je základní náhodná veličina u s normálním rozdělením $N(0,1)$. Druhou náhodnou veličinu získáme z normované sumy čtverců veličiny u při ν -násobném opakování (viz (3.17)) jako

$$\sqrt{\frac{\chi_\nu^2}{\nu}} .$$

Obě tyto náhodné veličiny necht' jsou nezávislé. Výsledná náhodná veličina, má potom tvar

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}} .$$

Rozdělení pravděpodobnosti této veličiny má opět jediný parametr ν (počet stupňů volnosti) a obvykle se uvádí ve tvaru [15], [16]

$$p_\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 - \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty . \quad (3.20)$$

Střední hodnota a disperze náhodné veličiny jsou v tomto případě ([15], [16])

$$\langle t \rangle = 0, \quad D_t = \langle t^2 \rangle = \frac{\nu}{\nu - 2} . \quad (3.21)$$

Rozdělení (3.20) je pro všechny hodnoty parametru ν symetrické kolem střední hodnoty a pro vyšší hodnoty počtu stupňů volnosti přechází k rozdělení normálnímu (viz např. [15]).

Vedle pojmu rozdělení pravděpodobnosti je v matematické statistice zaveden a často používán pojem distribuční funkce. Mějme například spojitou náhodnou veličinu (náhodnou proměnnou) x' , popsanou rozdělením (hustotou) pravděpodobnosti $p(x')$ v intervalu $x' \in (a, b)$. Zajímá nás, s jakou pravděpodobností P se při daném experimentu bude realizovat hodnota náhodné proměnné $x' \leq x$. Podle definice hustoty pravděpodobnosti je tato pravděpodobnost dána integrálem

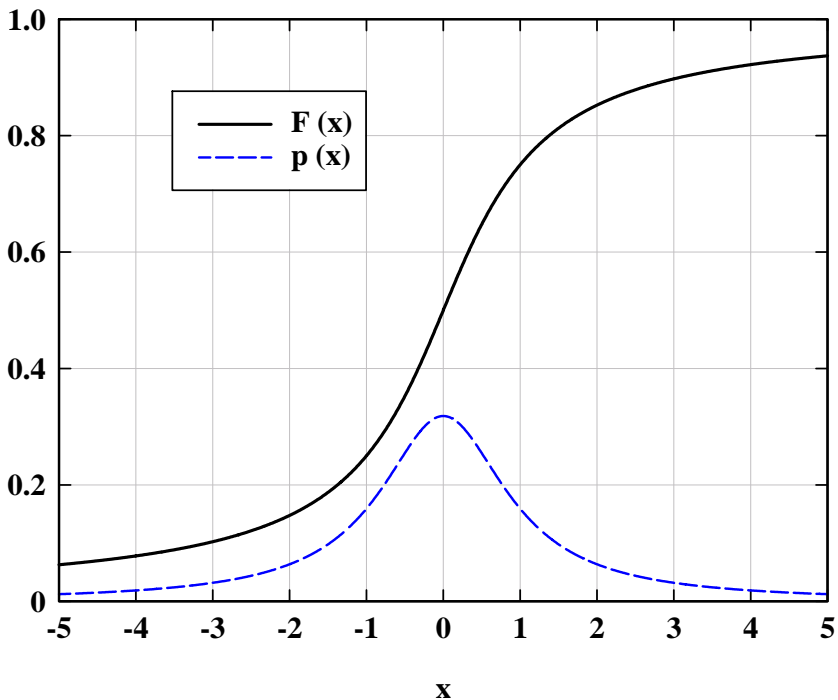
$$P(x) = \int_a^x p(x') dx' .$$

Tato pravděpodobnost, která je z definice funkcí x , se nazývá distribuční funkcí náhodné proměnné $F(x)$. Platí tedy

$$F(x) \equiv P(x) . \quad (3.22)$$

Situace je znázorněna na obr. 3.7 pro Cauchyho rozdělení pravděpodobnosti.

Obr. 3.7 K výkladu pojmu distribuční funkce

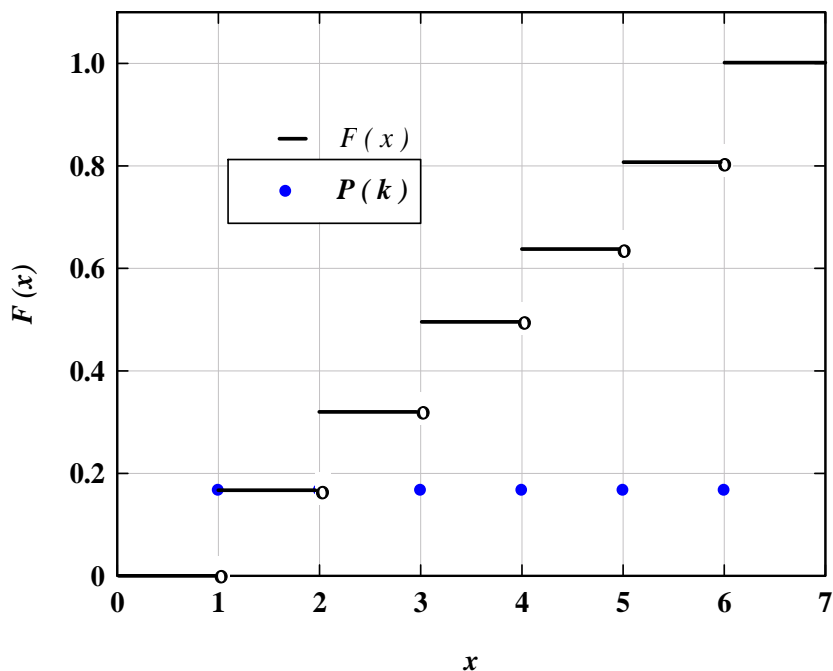


Distribuční funkci je možno zavést i pro diskrétní náhodnou proměnnou. Nabývá-li například diskrétní náhodná proměnná k celých hodnot ($k = (0, 1, 2, \dots, N)$) s pravděpodobnostmi $P(k)$, je analogicky k (3.22) distribuční funkcí náhodné veličiny nespojitá funkce $F(x)$ vytvořená úseky s konstantní amplitudou v intervalech mezi hodnotami náhodné proměnné k . Pro hodnoty $x < 0$ je $F(x) = 0$. Pro $k \in (0, N - 1)$ má funkce $F(x)$ v intervalech $x \in [k, k + 1)$ amplitudu

$$F(x) = \sum_{k'=0}^k P(k'), \quad (3.23)$$

pro $x \geq N$ je $F(x) = 1$. Jako příklad je na obr. 3.8. uvedena distribuční funkce náhodné veličiny x v intervalu $x \in (0, 7)$ pro diskrétní rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti v případě experimentu s hrací kostkou. Hodnoty distribuční funkce odpovídající celým hodnotám náhodné proměnné x vyznačené kroužky k hodnotám distribuční funkce nepatří.

Obr. 3.8. Distribuční funkce rovnoměrného rozdělení



3.3 STŘEDNÍ HODNOTA, MOMENTY NÁHODNÉ VELIČINY, MEDIÁN

S využitím pojmu rozdělení pravděpodobnosti můžeme přistoupit k zavedení další důležité charakteristiky náhodné veličiny, její střední hodnoty (střední hodnota bývá někdy označována jako hodnota očekávaná). Pro případ spojité náhodné proměnné (x) na intervalu (a, b) , která je popsána rozdělením pravděpodobnosti $p(x)$, je střední hodnota náhodné veličiny (μ_x) definována vztahem

$$\mu_x = \int_a^b x p(x) dx . \quad (3.24)$$

Z důvodu přehlednosti textu se střední hodnota v některých případech označuje ostrými závorkami, takže platí:

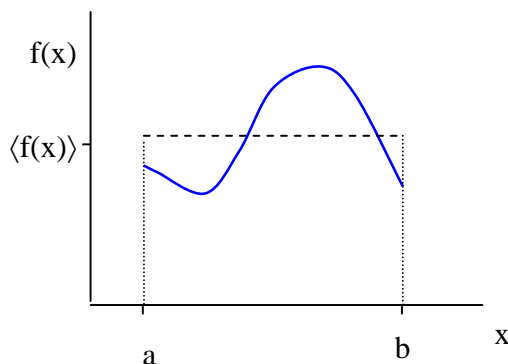
$$\mu_x \equiv \langle x \rangle .$$

Je-li na témže intervalu náhodné proměnné definována funkce náhodné proměnné $f(x)$ je její střední hodnota $\mu_f \equiv \langle f(x) \rangle$, v souladu s (3.24) definována vztahem:

$$\mu_f = \int_a^b f(x) p(x) dx . \quad (3.25)$$

Zavedení pojmu střední hodnoty, například podle (3.25), je možno ilustrovat následující úvahou (viz obr. 3.9)

Obr. 3.9 K zavedení pojmu střední hodnoty



Mějme na intervalu (a,b) funkci $f(x)$. Střední hodnotu $\langle f(x) \rangle$ stanovíme jednoduchým srovnáním integrálu funkce $f(x)$ v mezích (a,b) , tedy plochy pod funkcí $f(x)$ na obrázku 3.9, s plochou obdélníku též schematicky na obrázku vyznačeného. Zřejmě platí

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a} dx ,$$

což je forma (3.25) za předpokladu, že veličina x je popsána rovnoměrným rozdělením (3.13). Pro diskrétní náhodnou proměnnou k platí analogie vztahů (3.24) a (3.25)

$$\mu_k = \sum_k k p(k) , \quad (3.26)$$

$$\mu_f = \sum_k f(k) p(k) , \quad (3.27)$$

kde $p(k)$ je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny k a $f(k)$ je opět funkce náhodné veličiny.

Ve speciálním případě, kdy je funkce $f(x)$ lineární kombinací jiných funkcí náhodné veličiny, například

$$f(x) = \sum_l a_l g_l(x) ,$$

zřejmě platí

$$\langle f(x) \rangle = \sum_l a_l \langle g_l(x) \rangle , \quad (3.28)$$

tedy střední hodnota lineární kombinace, je lineární kombinací středních hodnot (srov. (3.25)).

Vedle střední hodnoty se pro charakterizování vlastností náhodné veličiny (s významem podobným střední hodnotě) používá tzv. medián. Medián je pro spojitě náhodné veličiny definován pomocí distribuční funkce (3.22) jako taková hodnota náhodné veličiny M_x , pro kterou platí

$$F(M_x) = \frac{1}{2} . \quad (3.29)$$

V tomto případě nastává situace podle (3.29) v jediném bodě. Je-li dále spojitě rozdělení pravděpodobnosti symetrické kolem střední hodnoty, lze snadno ukázat, že medián je roven této střední hodnotě. Význam mediánu vynikne v případě symetrických spojitých rozdělení pravděpodobnosti, která nemají střední hodnotu, ale mají medián. Příkladem takového rozdělení je rozdělení Cauchyho. Pro diskrétní náhodnou proměnnou může nastat podmínka (3.29) v určitém intervalu a v takovém případě je mediánem střed tohoto intervalu. Příkladem může být rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti pro experiment s hrací kostkou. Podmínka (3.29) je zde splněna v intervalu $x \in (3,4)$ (viz obr. 3.8) a mediánem je tedy hodnota $M_x = 3,5$. V některých případech nespojitých (stupňovitých) funkcí typu (3.23) může amplituda distribuční funkce projít

hodnotou 0,5 v bodě nespojitosti. V takovém případě je mediánem souřadnice tohoto bodu nespojitosti. Příkladem takového stavu může být medián diskrétního rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny k v intervalu $k = (0, 1, \dots, N)$, je-li N sudé. V takovém případě překročí amplituda distribuční funkce hodnotu 0,5 v bodě $x = N/2$, který je tedy v těchto případech mediánem. V případě diskrétních rozdělení pravděpodobnosti je možno ukázat (viz seminární úlohy), že mediánem binomického rozdělení (3.8) je střední hodnota ($\langle k \rangle = Np$), je-li $p = 0,5$. V ostatních případech je $M \neq \langle k \rangle$. Pro Poissonovo rozdělení (3.10) se medián liší od střední hodnoty vždy.

Střední hodnota náhodné veličiny je speciálním případem obecnějšího pojmu, tzv. momentu náhodné veličiny. Pro případ spojité náhodné veličiny x popsané rozdělením pravděpodobnosti $p(x)$ definujeme n-tý moment náhodné veličiny x vztahem

$$\mu_x^n = \int_V x^n p(x) dx , \quad (3.30)$$

kde V značí interval, ve kterém se náhodná veličina vyskytuje. V případě diskrétní náhodné veličiny platí analogicky

$$\mu_k^n = \sum_k k^n p(k) . \quad (3.31)$$

Je vidět, že ve speciálních případech je

$$\mu_x^0 = \mu_k^0 = 1 , \quad \mu_x^1 = \mu_x , \quad \mu_k^1 = \mu_k .$$

Vedle n-tého momentu náhodné veličiny se dále zavádí n-tý centrální moment náhodné veličiny vztahy

$$\mu_x^{n,c} = \int_V (x - \mu_x)^n p(x) dx , \quad (3.32)$$

$$\mu_k^{n,c} = \sum_k (k - \mu_k)^n p(k) . \quad (3.33)$$

Ve speciálních případech je opět

$$\mu_x^{0,c} = \mu_k^{0,c} = 1 , \quad \mu_x^{1,c} = \mu_k^{1,c} = 0 .$$

Druhý centrální moment se používá pro popis „šířky“ statistických rozdělení. Pro spojitou náhodnou veličinu máme

$$\mu_x^{2,c} = \int_V (x - \mu_x)^2 p(x) dx \equiv \langle (x - \mu_x)^2 \rangle . \quad (3.34)$$

Pro diskrétní náhodnou proměnnou analogicky

$$\mu_k^{2,c} = \sum_k (k - \mu_k)^2 p(k) \equiv \langle (k - \mu_k)^2 \rangle . \quad (3.35)$$

V případě normálního rozdělení platí

$$\mu_x^1 \equiv \mu_x = \mu, \quad \mu_x^{2,c} \equiv D_x \equiv \langle (x - \mu_x)^2 \rangle = \sigma^2 .$$

Druhý centrální moment je tedy roven čtverci parametru σ , pro který bylo v případě normálního rozdělení zavedeno označení disperze. Název disperze (s označením D_x nebo σ^2) se často používá pro obecné označení druhého centrálního momentu náhodné veličiny bez ohledu na typ rozdělení.

Přímým použitím definice disperze lze snadno například pro spojitou náhodnou veličinu ukázat

$$D_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 , \quad (3.36)$$

což je velice důležitý výsledek, který říká, že střední hodnota čtverce náhodné veličiny se nerovná čtverci střední hodnoty. Jejich rozdíl je roven právě disperzi. Z definice dále přímo vyplývá, že disperze náhodné veličiny je veličinou nezápornou. V případě, že $D = 0$, je náhodná veličina konstantou.

Z vyšších centrálních momentů se používá třetí centrální moment pro popis symetrie rozdělení pravděpodobnosti vůči střední hodnotě. Zavádíme parametr asymetrie γ vztahem

$$\gamma \equiv \frac{\mu_x^{3,c}}{\sigma_x^3} = \frac{1}{\sigma_x^3} \int_V (x - \mu_x)^3 p(x) dx . \quad (3.37)$$

Z definice je zřejmé, že v případě rozdělení pravděpodobnosti, které je symetrické vůči střední hodnotě, je parametr asymetrie nulový. K bližšímu seznámení

s pojmy zavedenými v této kapitole doporučujeme vyřešit seminární úlohy 3.3. až 3.14.

3.4 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI VÍCE NÁHODNÝCH VELIČIN

Vyšetřujme na počátku situaci, kdy jsou zadány dvě náhodné proměnné x , y definované v intervalech V_x , V_y s příslušnými rozděleními pravděpodobnosti $p(x)$, $q(y)$. Pravděpodobnost $P(x, x + dx; y, y + dy)$, že se veličina x nachází v intervalu hodnot $(x, x + dx)$ a zároveň veličina y v intervalu $(y, y + dy)$, je v tomto případě opět úměrná velikosti intervalů dx , dy , přičemž příslušné rozdělení pravděpodobnosti $\rho(x, y)$ je v tomto případě obecnou funkcí obou proměnných

$$P(x, x + dx; y, y + dy) = \rho(x, y) dx dy . \quad (3.38)$$

Formálně stejným způsobem jako výše zavádíme nyní střední hodnotu náhodné veličiny (například x) jako

$$\mu_x = \int_V x \rho(x, y) dx dy \equiv \langle x \rangle \quad (3.39)$$

a střední hodnotu její funkce

$$\langle f(x) \rangle = \int_V f(x) \rho(x, y) dx dy . \quad (3.40)$$

Dále momenty náhodné veličiny jako

$$\mu_x^n = \int_V x^n \rho(x, y) dx dy \equiv \langle x^n \rangle \quad (3.41)$$

a podobně centrální momenty

$$\mu_x^{n,c} = \int_V (x - \mu_x)^n \rho(x, y) dx dy \equiv \langle (x - \mu_x)^n \rangle . \quad (3.42)$$

V případě diskrétní náhodné proměnné je analogie dosavadního postupu a formulí (3.39)–(3.42) natolik zřejmá, že není třeba příslušné formule explicitně uvádět.

V případě nezávislých veličin odpovídá situace výše diskutované situaci spojení nezávislých experimentů (viz odst. 3.1) a pravděpodobnost současného výskytu veličin x, y v uvedených intervalech $(x, x + dx)$ a $(y, y + dy)$ je pak dána součinem pravděpodobností

$$P(x, x + dx; y, y + dy) = p(x) dx q(y) dy . \quad (3.43)$$

Rozdělení pravděpodobnosti má potom tvar

$$\rho(x, y) = p(x) q(y) . \quad (3.44)$$

Zavedme dále tzv. kovarianci $c_{x,y}$ vztahem

$$c_{x,y} = \int_V (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rho(x, y) dx dy \equiv \langle (x - \mu_x)(y - \mu_y) \rangle . \quad (3.45)$$

Je zřejmé, že v případě, že jsou veličiny x, y nezávislé, je kovariance (3.45) s rozdělením pravděpodobnosti (3.44) rovna nule. Z definičního vztahu (3.45) dále snadno vypočítáme

$$c_{x,y} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \quad (3.46)$$

a srovnáním s (3.36) vidíme, že platí

$$D_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle \langle x \rangle = c_{x,x} .$$

Pro posouzení stupně závislosti dvou veličin zavádíme v některých případech tzv. korelační koeficient

$$C_{x,y}^{cor} = \frac{c_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} .$$

Obecně platí

$$|C_{x,y}^{cor}| \leq 1 .$$

Uvažujme dále obecnější případ více náhodných veličin. Jsou-li dány náhodné veličiny x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) svými obory existence a rozděleními pravděpodobnosti, je rozdělení pravděpodobnosti analogicky k (3.38) obecně dáno funkcí n proměnných

$$\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad . \quad (3.47)$$

Střední hodnota náhodné veličiny (například x_j) je potom dána formulí

$$\mu_{x_j} = \int_V x_j \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \equiv \langle x_j \rangle \quad (3.48)$$

a střední hodnota její funkce

$$\langle f(x_j) \rangle = \int_V f(x_j) \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad . \quad (3.49)$$

Obdobným postupem je možno získat pro případ n proměnných vztahy pro momenty náhodných veličin, kovariance a korelační koeficienty zavedené výše pro případ dvou proměnných.

Uvažujme dále náhodnou veličinu s vytvořenou součtem n náhodných veličin x_i

$$s = \sum_{i=1}^n x_i \quad .$$

Střední hodnota součtu náhodných veličin je podle (3.48)

$$\begin{aligned} \langle s \rangle &= \int_V \sum_i x_i \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \sum_i \int_V x_i \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \sum_i \langle x_i \rangle \quad . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Platí tedy jednoduchá formule, která říká, že střední hodnota součtu je součet středních hodnot bez ohledu na tvar rozdělení pravděpodobnosti (3.47). Speciálním případem n náhodných proměnných je n -násobné opakování téže náhodné veličiny (též experimentu). Náhodný jev je pak místo na spojení n experimentů definován na n -násobném opakování experimentu jediného (viz odst. 3.1). Vytvoříme-li z výsledků n -násobného opakování jediné veličiny aritmetický průměr

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.51)$$

který je též náhodnou veličinou, je střední hodnota tohoto aritmetického průměru, vypočtená analogicky k (3.50) rovna střední hodnotě opakované náhodné veličiny x

$$\langle \bar{x} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x \rangle = \langle x \rangle, \quad (3.52)$$

protože v tomto případě samozřejmě platí $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$.

Pro náhodnou veličinu vytvořenou součtem n náhodných veličin můžeme stanovit nejen střední hodnotu, ale též standardní odchylku. K tomu je nutno vypočítat s využitím (3.49) druhý centrální moment

$$D_s = \iiint_{V_1 \dots V_n} (s - \mu_s)^2 \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \equiv \langle (s - \mu_s)^2 \rangle.$$

Jednoduchou úpravou platí (viz též (3.36))

$$D_s = \langle (s - \mu_s)^2 \rangle = \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2. \quad (3.53)$$

V dalším výpočtu je zřejmé, že platí

$$\langle s \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle \right)^2 = \sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle^2 + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle. \quad (3.54)$$

Pro další výpočet obdobně upravíme

$$s^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n x_i x_j$$

a dále

$$\langle s^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i^2 \rangle + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle x_i x_j \rangle . \quad (3.55)$$

S využitím (3.36) a (3.46) upravíme (3.55)

$$\langle s^2 \rangle = \sum_{i=1}^n D_{x_i} + \sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{x_i, x_j} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle . \quad (3.56)$$

Dosazením do (3.53) máme konečně

$$D_s = \sum_{i=1}^n D_{x_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{x_i, x_j} , \quad (3.57)$$

tedy disperze součtu náhodných veličin je rovna součtu disperzí a součtu kovariancí.

Rozšíříme-li součet na obecnější případ lineární kombinace

$$a = \sum_{i=1}^n a_i x_i , \quad (3.58)$$

kde a_i jsou konstanty, je možno obdobným postupem jako výše snadno vypočítat (viz sem. úloha 3.11)

$$D_a = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_i a_j c_{x_i, x_j} . \quad (3.59)$$

V případě, že jsou všechny veličiny x_i nezávislé je zřejmé

$$D_a = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i} , \quad (3.60)$$

protože pro všechny dvojice náhodných veličin platí $c_{x_i, x_j} = 0$.

Uvedené výsledky je možno opět snadno aplikovat na případ aritmetického průměru n nezávislých opakování náhodné veličiny, veličinu (3.51). Protože v tomto případě je pro všechna $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$D_{x_i} = D_x, \quad c_{x_i, x_j} = 0,$$

dostaneme

$$D_{\bar{x}} = \frac{1}{n} D_x. \quad (3.61)$$

Disperze aritmetického průměru se tedy s počtem členů zmenšuje jako $1/n$.

V případě součinu n náhodných veličin

$$X = \prod_{i=1}^n x_i, \quad (3.62)$$

počítáme střední hodnotu obecně podle (3.49)

$$\langle X \rangle = \int_V \prod_{i=1}^n x_i \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

V případě, kdy jsou všechny veličiny nezávislé a rozdělení pravděpodobnosti je možné „separovat“ na součin rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých veličin (srov. (3.44)), platí

$$\langle X \rangle = \prod_{i=1}^n \langle x_i \rangle. \quad (3.63)$$

3.5 CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA

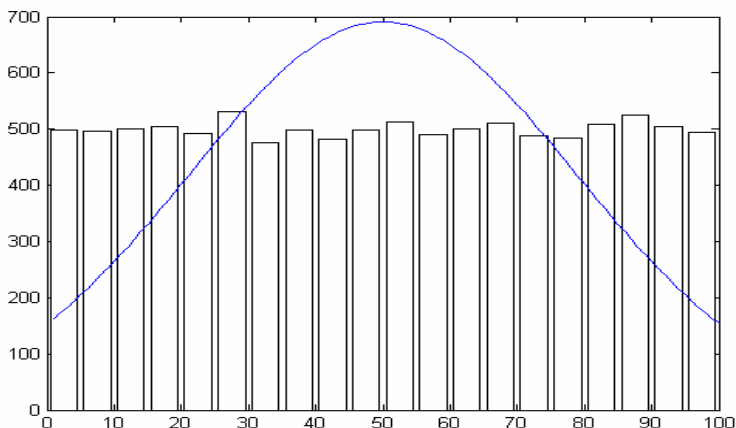
Centrální limitní věta je jednou z klíčových vět matematické statistiky. Pro naši potřebu v oblasti zpracování výsledků měření formulujeme její tvrzení pro případ náhodné veličiny, vytvořené jako aritmetický průměr \bar{x} z n nezávisle opakovaných měření téže náhodné veličiny x .

Je-li náhodná veličina x popsána rozdělením $p(x)$ se střední hodnotou μ_x a konečnou disperzí (D_x) , potom se rozdělení pravděpodobnosti $q(\bar{x})$ aritmetického průměru, s rostoucím n blíží k normálnímu rozdělení $N(\bar{x})$ se střední hodnotou μ_x a disperzí D_x/n . Symbolicky je možno tvrzení limitní věty zapsat ve formě

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q\left(\frac{(\bar{x}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = N(0,1) . \quad (3.64)$$

Důkaz centrální limitní věty je poměrně složitý a využívá se při něm speciálního aparátu matematické statistiky, který je mimo rámec tohoto textu. Případné zájemce je opět nutno odkázat na odbornou literaturu, například na již zmíněné knihy [12], [13] a [14]. Pro ilustraci tvrzení centrální limitní věty zde proto vedeme pouze jednoduchý příklad. Mějme náhodnou veličinu x v intervalu $(0,100)$ s rozdělením pravděpodobnosti, které se zřetelně liší od rozdělení nor-

Obr. 3.10a K výkladu centrální limitní věty ($n = 1$)

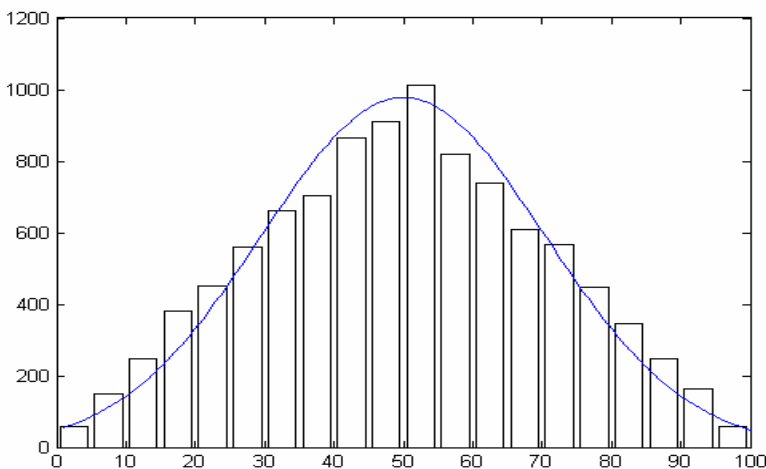


málního, například s rozdělením rovnoměrným. Rozdělme interval výskytu náhodné veličiny na úseky o velikosti 5 a vytvořme graf závislosti počtu pokusů, které se vyskytly v jednotlivých úsecích při například 10 000 nezávisle opakovaných výběrech (histogram). Výsledek je uveden na obr. 3.10a. Je zřejmé, že počty výskytů náhodné veličiny v jednotlivých úsecích histogramu se budou pohybovat okolo amplitudy odpovídající rovnoměrnému rozdělení s $p = 1/20$. V obrázku je navíc zakresleno hypotetické normální rozdělení se střední hodnotou 50 a disperzí odpovídající disperzi rovnoměrného rozdělení, tedy $\sigma^2 = (100^2/12)$. Dále jsou postupně konstruovány histogramy aritmetických průměrů s rostoucím počtem členů. Například pro $n = 2$ jsou nejprve vybrána dvě čísla s rovnoměrným rozdělením, vytvořen jejich aritmetický průměr, tedy veličina

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 x_i .$$

Teprve tato náhodná veličina je testována na výskyt v jednotlivých úsecích histogramu. Příslušný histogram opět pro 10 000 pokusů je uveden na obr. 3.10b. Je vidět, že histogram již nemá rovnoměrný charakter, hodnoty veli-

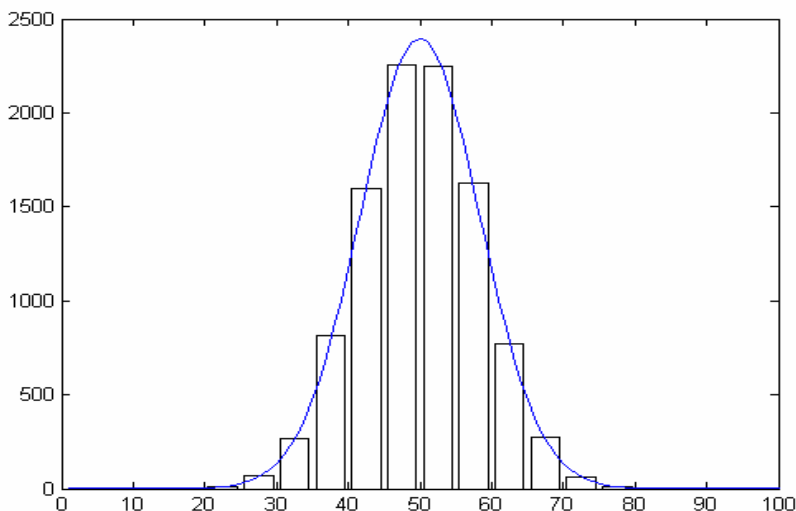
Obr. 3.10b K výkladu centrální limitní věty ($n = 2$)



činy \bar{x}_2 se s větší pravděpodobností vyskytují v okolí středu histogramu. Hy-

potetické normální rozdělení uvedené též v našem obrázku má nyní disperzi $\sigma^2/2$. Na dalším obrázku 3.10c je uveden histogram pro aritmetický průměry s větším počtem členů, tedy například veličiny \bar{x}_n pro $n = 12$. Hypotetické normální rozdělení má disperzi $\sigma^2/12$ a je jasně vidět, že odchylky histogramu od teoretického normálního rozdělení jsou zde již minimální. Rozdělení prochází s malými odchylkami středy úseček, které mají amplitudu odpovídající četnosti výskytu testované veličiny v jednotlivých úsecích histogramu.

Obr. 3.10c K výkladu centrální limitní věty ($n = 12$)



Hlavní přínos centrální limitní věty v oblasti zpracování výsledků měření je v tvrzení, že výsledek limitního procesu nezáleží na tvaru rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ náhodné veličiny x . Formulace (3.61) je sice limitní, vlastní proces však v řadě případů konverguje velice rychle (což je dokumentováno i příklady na obrázcích 3.10). Tak je možné aritmetický průměr měřených hodnot již v případě nepříliš rozsáhlého souboru považovat s velkou přesností za veličinu popsanou normálním rozdělením (dále viz kap. 4). Konvergence je v případě rovnoměrného rozdělení natolik rychlá, že není-li například k dispozici generátor náhodných čísel s normálním rozdělením, a je naopak k dispozici generátor náhodných čísel s rozdělením rovnoměrným, používá se běžně pro generování čísel s normálním rozdělením a jednotkovou disperzí rozdělení aritmetického průměru z pouhých 12 nezávislých opakování náhodných čísel s rozdělením

rovnoměrným. K tomu volíme oblast generování čísel s rovnoměrným rozdělením $(-6, 6)$. Střední hodnota je tedy nula a disperze (viz seminární úloha 3.9)

$$D_x = \frac{(12^2)}{12} = 12 \quad .$$

Aritmetické průměry \bar{x}_{12} výběru 12 náhodných čísel s takovým rozdělením mají opět nulovou střední hodnotu (viz 3.52) a jejich disperze podle (3.61)

$$D_{\bar{x}_{12}} = \frac{D_x}{n} = \frac{12}{12} = 1 \quad .$$

4. PRINCIP MAXIMÁLNÍ VĚROHODNOSTI

Pro odhad parametrů rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny se obvykle používá tzv. „princip maximální věrohodnosti“ (maximum likelihood). Zde se nejprve zavádí tzv. věrohodnostní funkce náhodné veličiny, která je úměrná pravděpodobnosti realizované hodnoty v případě diskrétní náhodné veličiny, nebo hustotě pravděpodobnosti v případě veličin spojitých. Věrohodnostní funkce se chápe jako závislá na hodnotách neznámých parametrů rozdělení. Podle principu maximální věrohodnosti se pak vyberou ty hodnoty parametrů příslušných rozdělení pravděpodobnosti nebo hustot pravděpodobnosti, pro které jsou pravděpodobnosti nebo hustoty pravděpodobnosti realizované hodnoty největší. Dále ukážeme, jak tento zdánlivě jednoduchý princip dovolí odhadnout parametry rozdělení pravděpodobnosti měřených náhodných veličin a charakterizovat tak nejistotu výsledků měření.

4.1 ODHAD PARAMETRŮ ROZDĚLENÍ Z JEDINÉHO EXPERIMENTU

Hlavním přínosem principu maximální věrohodnosti je možnost formulovat s jeho využitím početní postupy pro nalezení odhadů parametrů příslušných rozdělení pravděpodobnosti. Jako příklad uveďme postup pro odhad parametru binomického rozdělení, kterým je hodnota p pravděpodobnosti realizace jevu (viz definici v odst. 3.1). Při jediném experimentu necht' se jev o neznámé pravděpodobnosti p (při N nezávislých pokusech) realizoval k' -krát. Pravděpodobnost tohoto výsledku $P_{p,N}(k')$ je dána vztahem (3.8). Nyní však pro odhad parametru p chápeme tuto pravděpodobnost jako funkci proměnné p

$$P_{N,k'}(p) = \binom{N}{k'} p^{k'} (1-p)^{N-k'} \quad (4.1)$$

a podle principu maximální věrohodnosti hledáme hodnotu \tilde{p} , pro niž je pravděpodobnost (4.1.) maximální. Nutnou podmínkou pro maximum je

$$\left(\frac{dP_{N,k'}(p)}{dp} \right)_{\tilde{p}} = 0 .$$

Potom vypočítáme

$$\left(\frac{dP_{N,k'}(p)}{dp} \right)_{\tilde{p}} = \binom{N}{k'} k' \tilde{p}^{k'-1} (1 - \tilde{p})^{N-k'} - (N - k') \binom{N}{k'} \tilde{p}^{k'} (1 - \tilde{p})^{N-k'-1} = 0$$

a dále

$$\tilde{p} = \frac{k'}{N} . \quad (4.2)$$

Vzhledem k tomu, že odhady nalezené podle principu maximální věrohodnosti jsou opět náhodné veličiny, má smysl se ptát po jejich střední hodnotě a disperzi. V případě binomického rozdělení je střední hodnota odhadu (4.2) (s využitím výsledku seminární úlohy 3.4)

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{1}{N} \langle k' \rangle = \frac{Np}{N} = p . \quad (4.3)$$

Pokud je tedy střední hodnota odhadu rovna střední (očekávané) hodnotě náhodné veličiny, hovoříme o odhadu nevychýleném.

Pro disperzi odhadu parametru binomického rozdělení \tilde{p} podle (4.2) máme (srovnej (3.60))

$$D_{\tilde{p}} = \left(\frac{1}{N} \right)^2 D_{k'} , \quad (4.4)$$

kde $D_{k'}$ je disperze náhodné veličiny popsané binomickým rozdělením.

Užitím výsledků seminární úlohy 3.4 a odhadu (4.2) je možno dále odhadnout střední hodnotu a disperzi diskrétní náhodné veličiny k popsané binomickým rozdělením. Pro střední hodnotu máme

$$\mu_k \equiv \langle k \rangle = Np \rightarrow \tilde{\mu}_k = N\tilde{p} = k' . \quad (4.5)$$

Podobně pro disperzi

$$D_k = Np(1 - p) \rightarrow \tilde{D}_k = \frac{k'(N - k')}{N} . \quad (4.6)$$

Dále je zřejmé (viz (4.3))

$$\langle \tilde{\mu}_k \rangle = N \langle \tilde{p} \rangle = Np = k$$

a odhad střední hodnoty (4.5) je tedy nevychýlený. Na druhé straně je možno ukázat (viz sem. úloha 4.1), že

$$\langle \tilde{D}_k \rangle = \frac{N-1}{N} D_k \quad (4.7)$$

a odhad disperze je naopak odhadem vychýleným.

U rozdělení Poissonova získáme uvedeným postupem odhad parametru rozdělení μ ve tvaru

$$\tilde{\mu} = k' , \quad (4.8)$$

kde k' je opět v jediném experimentu konkrétně realizovaná hodnota proměnné k .

Podobně jako odhad parametru binomického rozdělení (4.2) je i odhad (4.8) odhadem nevychýleným, protože jednoduše platí (též s využitím seminární úlohy 3.6)

$$\langle \tilde{\mu} \rangle = \langle k' \rangle = \mu . \quad (4.9)$$

Střední hodnotu a disperzi náhodné veličiny popsané Poissonovým rozdělením odhadneme s užitím výsledků seminární práce 3.6

$$\langle k \rangle \equiv \mu_k = \mu \rightarrow \tilde{\mu}_k = \tilde{\mu} = k' ,$$

$$D_k \equiv \sigma_k^2 = \mu \rightarrow \tilde{D}_k \equiv \tilde{\sigma}_k^2 = \tilde{\mu} = k' . \quad (4.10)$$

Střední hodnoty obou odhadů jsou triviálně rovny hodnotám správným a oba odhady jsou tedy v tomto případě nevychýlené.

Dále ukážeme, jak je možné odhady založené na realizaci jediné (i když nejpravděpodobnější) hodnoty náhodné veličiny významně upřesnit, protože v některých případech se tyto odhady standardně používají. Příkladem mohou být měření v jaderné fyzice. Často se zde registrují počty událostí (jaderných rozpadů) popsaných diskretním Poissonovým rozdělením, v závislosti na různých externích parametrech. Pokud jsou parametry experimentu časově dostatečně stabilní, je možno časový interval „nabírání statistiky“ prodloužit, a zaznamenávat v jediném experimentu vysoké hodnoty k' . Uvážíme-li, že relativní nejistota odhadu je:

$$\tilde{\eta}_k = \frac{\tilde{\sigma}_k}{\tilde{\mu}_k} = \frac{1}{\sqrt{k'}}$$

je možno již při registraci hodnot k' řádu 10^6 dosáhnout relativní nejistoty měřené hodnoty řádu 0,1 %.

4.2 OPAKOVANÉ NEZÁVISLÉ EXPERIMENTY

Obecně používanou možností zlepšení kvality odhadu je využití výsledků opakovaných nezávislých experimentů (realizací náhodné proměnné).

Uvažujme nejprve diskretní náhodnou veličinu k s binomickým rozdělením pravděpodobnosti. Opakujeme-li n -krát nezávisle „binomický experiment“, získáme n -tici hodnot k_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Pravděpodobnost nalezení takové n -tice hodnot je dána vztahem

$$\begin{aligned} P_{k_1, k_2, \dots, k_n}(p) &= \prod_{i=1}^n P_{k_i, N}(p) = \\ &= p^{\sum_{i=1}^n k_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^n (N-k_i)} \prod_{i=1}^n \binom{N}{k_i}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pravděpodobnost je opět závislá na p a jejího maxima, podle požadavku principu maximální věrohodnosti, je dosaženo je-li

$$\left(\frac{dP_{k_1, k_2, \dots, k_n}(p)}{dp} \right)_{\tilde{p}} = 0 .$$

Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$(1 - \tilde{p}) \sum_{i=1}^n k_i = \tilde{p} \sum_{i=1}^n (N - k_i)$$

a konečně

$$\tilde{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{N} . \quad (4.12)$$

Nový odhad je tedy aritmetickým průměrem odhadů typu (4.2) a jeho střední hodnota

$$\langle \tilde{p} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\langle k_i \rangle}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{N p}{N} = p$$

je rovna správné hodnotě parametru a odhad je tedy odhadem nevychýleným. Disperze odhadu je podle (3.60)

$$D_{\tilde{p}} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{N} \right)^2 D_{k_i} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{N} \right)^2 D_{k'} \quad (4.13)$$

a je tedy podle očekávání n -krát menší než disperze odhadu z jediného experimentu (4.4).

Střední hodnotu a disperzi náhodné veličiny odhadneme v tomto případě s využitím (4.12) vztahy

$$\mu_k \equiv \langle k \rangle = N p \quad \rightarrow \quad \tilde{\mu}_k = N \tilde{p} = N \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$$

$$D_k = N p (1 - p) \quad \rightarrow \quad \tilde{D}_k = N \tilde{p} (1 - \tilde{p}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \left(1 - \frac{1}{N} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i \right) .$$

Ve srovnání s odhadem disperze náhodné veličiny z jediného experimentu (viz (4.6)) je vidět, že výsledek jediného měření k' je zde nahrazen aritmetickým průměrem výsledků n -krát nezávisle opakovaných experimentů. Je možno snadno ukázat, že odhad střední hodnoty náhodné veličiny je nevychýlený, zatímco střední hodnota odhadu disperze (viz sem. úloha 4.2)

$$\langle \tilde{D}_k \rangle = N \langle \tilde{p} (1 - \tilde{p}) \rangle = D_k \frac{nN-1}{nN} \quad (4.14)$$

není rovna disperzi náhodné veličiny a odhad disperze je, stejně jako v předešlém případě využití výsledku jediného experimentu (viz (4.7)), odhadem vychýleným.

U Poissonova rozdělení dostaneme na základě opakovaných měření odhad pro μ (viz sem. úloha 4.3)

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i, \quad (4.15)$$

což je aritmetický průměr odhadů typu (4.8).

Odhad střední hodnoty veličiny popsané Poissonovým rozdělením je potom

$$\langle k \rangle \equiv \mu_k = \mu \rightarrow \tilde{\mu}_k = \tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$$

a je totožný s odhadem disperze náhodné veličiny

$$D_k = \mu \rightarrow \tilde{D}_k = \tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i.$$

Je zřejmé, že oba odhady jsou, stejně jako v předešlém případě odhadu na základě jediného experimentu, odhady nevychýlené.

Ukažme dále, jak je možno s využitím výsledků opakovaných měření odhadnout parametry normálního rozdělení, tedy rozdělení se dvěma parametry μ a σ (viz (3.16)). Hustota pravděpodobnosti realizace n-tice hodnot x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) je dána součinem funkcí typu (3.16) a je nyní podle principu maximální věrohodnosti funkcí μ a σ

$$p_{x_1, x_2, \dots, x_n}(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \right) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}. \quad (4.16)$$

Maxima pravděpodobnosti v závislosti na μ a σ je dosaženo v bodech $\tilde{\mu}$ a $\tilde{\sigma}$, v nichž je zároveň splněno

$$\left(\frac{\partial p_{x_1, x_2, \dots, x_n}(\mu, \sigma)}{\partial \mu} \right)_{\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}} = \left(\frac{\partial p_{x_1, x_2, \dots, x_n}(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} \right)_{\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}} = 0 . \quad (4.17)$$

První z rovnic vede na požadavek

$$\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} \right)^n \left(\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \right) 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu}) e^{-\frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu})^2} = 0 .$$

Předpokládáme-li, že $\tilde{\sigma} \neq 0$, dostaneme pro netriviální řešení

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu}) = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4.18)$$

a odhadem je opět aritmetický průměr výsledků jednotlivých experimentů. Střední hodnota odhadu je

$$\langle \tilde{\mu} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x \rangle = \mu$$

a odhad je tedy nevychýlený.

Pro odhad parametru σ využijeme druhou z rovnic (4.17). Výpočet obdobným způsobem jako v případě odhadu parametru μ vede na hodnotu odhadu (viz též Seminární úloha 4.4)

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu})^2 . \quad (4.19)$$

Pro posouzení kvality tohoto odhadu vypočteme jeho střední hodnotu. K tomu účelu upravíme (4.19)

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2\tilde{\mu}}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \tilde{\mu}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \tilde{\mu}^2 . \quad (4.20)$$

Dále platí

$$\tilde{\mu}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n x_i x_j$$

a dosazením do (4.20) získáme

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n x_i x_j . \quad (4.21)$$

Potom

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}^2 \rangle &= \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n \langle x_i^2 \rangle - \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle x_i x_j \rangle = \\ &= \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n (D_{x_i} + \langle x_i \rangle^2) - \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (c_{x_i x_j} + \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle) \end{aligned}$$

a dále, protože

$$D_{x_i} = D_x, \quad c_{x_i x_j} = 0, \quad \langle x_i \rangle = \langle x_j \rangle = \langle x \rangle , \quad (4.22)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}^2 \rangle &= \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n D_x + \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n \langle x \rangle^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle x \rangle \langle x \rangle = \\ &= \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n D_x + \frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n \langle x \rangle^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \langle x \rangle^2 \end{aligned}$$

a konečně

$$\langle \tilde{\sigma}^2 \rangle = \frac{n-1}{n} D_x . \quad (4.23)$$

Odhad disperze je tedy odhadem vychýleným. Nevychýlený odhad $(\tilde{\sigma}^2)^*$ zkonstruujeme snadno využitím (4.23)

$$(\tilde{\sigma}^2)^* = \frac{n}{n-1} \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu})^2 \equiv S_x^2 . \quad (4.24)$$

Je zřejmé, že v tomto případě skutečně platí

$$\langle (\tilde{\sigma}^2)^* \rangle \equiv \langle S_x^2 \rangle = \frac{n}{n-1} \langle \tilde{\sigma}^2 \rangle = D_x .$$

Výsledek měření veličiny podléhající normálnímu rozdělení, je-li k dispozici soubor výsledků n nezávisle opakovaných měření, je tedy možno v této fázi zapsat použitím formulí (4.18 a (4.24)

$$x = \tilde{\mu} \pm \tilde{\sigma}^* = \bar{x} \pm S_x . \quad (4.25)$$

Chceme-li výsledek (4.25) interpretovat s ohledem na pravděpodobnost výskytu veličiny x ve vyznačeném intervalu v okolí správné (očekávané) hodnoty μ_x , ptáme se na hodnotu

$$P = \int_{\mu_x - S_x}^{\mu_x + S_x} N_x(\mu_x, \sigma_x) dx . \quad (4.26)$$

Tuto hodnotu však nejsme schopni stanovit, protože u parametrů rozdělení μ_x a σ_x známe pouze jejich již uvedené odhady.

Problém je řešitelný s využitím vlastností Studentova t-rozdělení, které bylo zavedeno v odst. 3.2 (viz. (3.20)). Pro práci s tímto rozdělením je však třeba vytvořit veličinu

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{v}{\nu}}} ,$$

kde u je „normovaná“ veličina popsaná normálním rozdělením $N_u(0,1)$ a veličina v je náhodná veličina popsaná rozdělením χ^2 s ν stupni volnosti. Je možno ukázat (viz též příloha 6.5), že má-li veličina x normální rozdělení $N(\mu_x, \sigma_x)$, má aritmetický průměr z n nezávislých opakování

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

těž normální rozdělení se střední hodnotou μ_x a disperzí (σ_x^2/n) (viz též kap. 3). Potom tedy veličina

$$\frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x} \sqrt{n} \equiv u \quad (4.27)$$

je onou „normovanou“ veličinou s normálním rozdělením $N_u(0,1)$. Dále je možno ukázat (viz např. [16]), že veličina

$$v = \frac{(n-1)}{\sigma_x^2} S_x^2 = \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (4.28)$$

je pro uvažovaná nezávislá opakování náhodné veličiny $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ s normálním rozdělením náhodnou veličinou popsanou rozdělením χ^2 s $n - 1$ stupni volnosti. Nyní je tedy možné vytvořit veličinu

$$t = \frac{\frac{\bar{x} - \mu_x}{\sigma_x} \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{v}{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu_x}{S_x} \sqrt{n} \quad , \quad (4.29)$$

která má t-rozdělení s jediným parametrem, kterým je počet stupňů volnosti ν , v tomto případě $\nu = n - 1$. Protože tvar t-rozdělení je znám (viz (3.20)), je nyní také možné vypočítat interval, ve kterém se veličina (4.29) vyskytuje s požadovanou pravděpodobností. Předpokládejme například, že požadujeme hodnotu pravděpodobnosti odpovídající intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ pro normální rozdělení, tedy $P = 0,6827$ podle tabulky 3.1. Hledáme tedy hodnotu $t_p(\nu)$, pro kterou platí

$$P = \int_{-t_p}^{t_p} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 - \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} dt = 0.6827 \quad , \quad (4.30)$$

pro danou hodnotu ν . Hodnoty $t_p(\nu)$ pro příslušné stupně volnosti ν a pro dané, obvykle požadované, hodnoty pravděpodobnosti P jsou uvedeny v tabulce

4.1. V levém sloupci tabulky je uveden počet stupňů volnosti, hodnoty pravděpodobnosti (v procentech) jsou vyznačeny v horním řádku. Ve sloupci pod

Tab. 4.1 Hodnoty $t_p(\nu)$ pro různé hodnoty pravděpodobnosti P a stupně volnosti ν

stupeň volnosti ν	pravděpodobnost (P)					
	0, 6827	0,90	0,95	0,9545	0,99	0,9973
	σ			2σ		3σ
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,66	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

požadovanou hodnotou pravděpodobnosti jsou uvedeny hodnoty t_p . Nyní tedy máme k dispozici podstatně fundovanější postup stanovení výsledku měření. Můžeme vybrat interval, v němž se vyskytuje aritmetický průměr v okolí správné hodnoty měřené veličiny (veličina $(\bar{x} - \mu_x)$) s požadovanou pravděpodobností P při daném počtu opakovaných měření (velikosti výběru). Nemusíme k tomu znát správnou hodnotu měřené veličiny ani její disperzi. Hledaným intervalem je podle (4.29) oblast

$$(-t_p(\nu) \frac{S_x}{\sqrt{n}} \leq (\bar{x} - \mu_x) \leq t_p(\nu) \frac{S_x}{\sqrt{n}}) \quad (4.31)$$

Tento výsledek lze slovně vyjádřit:

„Kdykoliv zopakujeme za stejných podmínek n nezávislých měření veličiny x , bude se aritmetický průměr naměřených hodnot, tedy veličina \bar{x} , nacházet v okolí správné hodnoty vymezeném vztahem (4.31) s pravděpodobností P “.

Hodnotu měřené veličiny s použitím n nezávislých opakovaných měření potom uvádíme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm t_p(\nu) \frac{S_x}{\sqrt{n}} \quad (4.32)$$

s hodnotou P odpovídající standardní odchylce, tedy $P = 0.6827$.

Z tabulky 4.1 je vidět, že s rostoucím počtem stupňů volnosti konverguje t -rozdělení k rozdělení normálnímu. Hodnoty $t_p(\infty)$ pro vybrané hladiny pravděpodobnosti souhlasí s teoretickými hodnotami podle tab. 3.1. V oblasti nízkých počtů opakovaných měření jsou opravy pomocí hodnoty $t_p(\nu)$ v (4.32), zvláště pro vyšší hladiny pravděpodobnosti, výrazné. Fyzikálně je tento výsledek zřejmý. Pro dostatečně velké počty opakovaných měření je podle centrální limitní věty aritmetický průměr náhodnou veličinou popsanou normálním rozdělením a nejistotu měření odhadneme jednoduše standardní odchylkou aritmetického průměru. V tab. 4.1. (viz první sloupec zleva) se pak hodnoty opravy intervalu nejistoty $t_p(\nu)$ pohybují blízko jedničky. U menšího počtu opakovaných měření se standardní odchylka vypočtená podle (4.24) stává méně spolehlivým parametrem a pro dosažení potřebné objektivity výsledku měření je zapotřebí interval nejistoty odpovídajícím způsobem rozšířit vynásobením koeficientem $t_p(\nu)$.

Princip maximální věrohodnosti není jedinou metodou odhadu parametrů statistických rozdělení. Alternativně lze například střední hodnoty náhodné veličiny odhadnout pomocí tzv. principu nejmenších čtverců. Zde odhadujeme správnou (očekávanou) hodnotu na základě požadavku minima sumy čtverců odchylek naměřených hodnot od této hledané správné hodnoty. Byly-li například při n -násobném nezávislém opakování experimentu nalezeny hodnoty veličiny x_i , ($i = 1, \dots, n$), odhadneme její střední hodnotu μ_x podle principu nejmenších čtverců minimalizací sumy čtverců odchylek

$$\Delta^2(\mu_x) \equiv \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2$$

v závislosti na μ_x . Optimální hodnotou, ve smyslu tohoto odhadu, je ta hodnota $\tilde{\mu}_x$, pro kterou platí

$$0 = \left(\frac{d\Delta^2}{d\mu_x} \right)_{\mu_x = \tilde{\mu}_x} = 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu}_x) \Rightarrow \tilde{\mu}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (4.33)$$

Odhadem je tedy opět aritmetický průměr naměřených hodnot. Tentokrát však není zapotřebí znát konkrétní tvar rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny x .

V praxi se často zabýváme náhodnými veličinami, jejichž rozdělení pravděpodobnosti neznáme. Jejich střední hodnotu lze sice vždy odhadnout aritmetickým průměrem, o němž víme, že je podle centrální limitní věty pro větší objemy výběru (větší hodnoty n) v dobré aproximaci popsán normálním rozdělením. Pokud však chceme pokračovat dále a posoudit rigorózně dispersi odhadu, neobejdeme se bez znalosti konkrétního rozdělení pravděpodobnosti studované náhodné veličiny. Přesto se však uvedený postup s využitím vlastností t -rozdělení běžně používá i v těchto případech, kdy konkrétní tvar rozdělení pravděpodobnosti studované veličiny neznáme. Podrobněji o této problematice viz např. [15], [16]).

4.3 ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ MĚŘENÍ JEDINÉ VELIČINY

Je-li k dispozici statistický soubor dat, tedy výsledky n nezávisle opakovaných měření veličiny popsané normálním rozdělením, vyhodnotíme aritmetický průměr naměřených hodnot (4.18) a standardní odchylku S_x podle (4.24). Dále posoudíme kvalitu souboru naměřených výsledků vzhledem k eventuálnímu výskytu výsledku zatíženého „hrubou“ chybou. K tomu stanovíme podle tabulky 4.1 hodnotu $t_p(\nu)$ na hladině pravděpodobnosti $P_{3\sigma} = 0,9973$ (srovnej též tab. 3.1). Počet stupňů volnosti je roven počtu opakovaných měření zmenšenému o jedničku $\nu = n - 1$. Dále vyhodnotíme odchylky naměřených hodnot od hodnoty aritmetického průměru, a pokud je v některém případě

$$|x_i - \bar{x}| \geq t_{P_{3\sigma}}(\nu) S_x, \quad (4.34)$$

tedy výsledek realizovaný s pravděpodobností $P \leq 0,003$, příslušnou hodnotu považujeme za hodnotu zatíženou hrubou chybou, ze zpracovávaných hodnot ji vynecháme a postup stanovení veličin \bar{x} a S_x opakujeme. Dále stanovíme odhad standardní odchylky aritmetického průměru, tedy veličinu (S_x / \sqrt{n}) a z tabulky 4.1 určíme faktor $t_p(\nu)$, obvykle na hladině pravděpodobnosti $P = 0,6827$. Poté zapíšeme výsledek ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm t_p(\nu) \frac{S_x}{\sqrt{n}}. \quad (4.35)$$

Pokud nemáme informaci o charakteru statistického rozdělení měřené veličiny, je tento zcela rigorózní postup v plné míře oprávněn jen v první části, tedy odhadu správné hodnoty měřené veličiny aritmetickým průměrem, který, jak již bylo ukázáno, je na charakteru statistického rozdělení nezávislý. Odhad disperze (standardní odchylky) však na typu statistického rozdělení závisí (viz odst. 4.1). Protože se však v praxi v celé řadě významných aplikací ukazuje aproximace normálním rozdělením jako vyhovující, považuje se formule (4.35) pro zápis výsledku měření za vhodné přiblížení a až na výjimky se běžně používá. Tento

postup zpracování výsledku opakovaných nezávislých měření jediné veličiny doporučuje též norma „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement“, vydaná v říjnu 1993 mezinárodní organizací pro standardizaci ISO, zmíněná v kap. 1.

Postup zpracování výsledku jediného měření ilustrujme dále na konkrétním případě. Nechť byla „mikrometrem“ měřena tloušťka d skleněné planoparalelní destičky. Bylo provedeno šest opakovaných měření na různých místech destičky

Tab. 4.2

	d	$d - \bar{d}$	$(d - \bar{d})^2$
	(mm)	(mm)	(mm ²)
1	1.23	-0.03	0.0009
2	1.20	-0.06	0.0036
3	1.42	0.16	0.0256
4	1.21	-0.05	0.0025
5	1.26	0.00	0.0000
6	1.24	-0.02	0.0004
Suma	7.56		0.0330

a získány hodnoty uvedené v druhém sloupci tab. 4.2. Pro střední hodnotu \bar{d} platí

$$\bar{d} = \frac{\sum_i d_i}{n} = \frac{7,56}{6} = 1,26 \text{ mm} .$$

Podle (4.24) odhadneme nyní standardní odchylku jediného měření S_d

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{(6-1)} \sum_{i=1}^6 (d_i - \bar{d})^2} = \sqrt{\frac{0,0330}{(6-1)}} \text{ mm}^2 = 0,0812403 \text{ mm} \cong 0,08 \text{ mm}$$

V tab. 4.1 najdeme $t_{p,3\sigma}(5) = 5,51$ a pro posouzení eventuálního vlivu hrubé chyby najdeme číselnou hodnotu $t_{p,3\sigma}(5) S_d = 0,44$, kterou porovnáme s odchylkami $d_i - \bar{d}$ ve třetím sloupci tab. 4.2. Je vidět, že ani „podezřelá“ hodnota d_3 zdaleka nenaplnuje kritérium pro hrubou chybu (4.34) a ve zpracovávaném

souboru ji ponecháme. Dále vypočteme odhad standardní odchylky aritmetického průměru

$$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \frac{0,0812403}{\sqrt{6}} = 0,033166 \text{ mm}$$

a v tab. 4.1. nalezneme hodnotu $t_p(\nu)$ na hladině pravděpodobnosti $P = 0,6827$, tedy

$$t_{0,6827}(5) = 1,11 .$$

Vypočteme dále hodnotu $t_p(\nu)S_{\bar{d}}$ a po zaokrouhlení na dvě platné cifry máme podle (4.35)

$$d = (1,260 \pm 0,037) \text{ mm} .$$

Při zaokrouhlení nejistoty na jednu platnou číslici bychom zanesli do stanovení intervalu nejistoty zaokrouhlovací chybu okolo 10 %, což je srovnatelné s opravou na nízký počet stupňů volnosti, a v tomto případě tedy není zaokrouhlení na jednu platnou číslici vhodné.

Uvedený postup stanovení výsledku měření jediné veličiny sice odpovídá doporučení mezinárodní normy, má však, jak již bylo řečeno, hlavní nedostatek v nejistém předpokladu o charakteru rozdělení náhodné veličiny. Dále zde není započtena nejistota typu B, tedy případný vliv omezené přesnosti použitého měřicího přístroje, která je blíže diskutována v odst. 2.3.

4.4 PŘENOS NEJISTOTY

Mějme veličinu y , která je funkcí náhodných proměnných x_i ($i = (1, \dots, n)$)

$$y \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n) . \quad (4.36)$$

Máhodné veličiny x_i necht' jsou popsány statistickými rozděleními $p(x_i)$ se středními hodnotami μ_i a disperzemi σ_i^2 . Veličiny x_i necht' jsou nezávislé. V dostatečně malém okolí bodu $\mu \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ je možno rozvést funkci $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v řadu

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu_1, \dots, \mu_n} (x_i - \mu_i) + \dots$$

a v rozvoji ponechat pouze členy lineární v $(x_i - \mu_i)$. Potom je možné psát

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong f(\mu) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu} (x_i - \mu_i) . \quad (4.37)$$

Dále je možné upravit (4.37) na tvar

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mu) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu} x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu} \mu_i , \quad (4.38)$$

Veličina $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je tedy náhodnou veličinou, protože je lineární kombinací náhodných veličin x_i (první a třetí člen v (4.38) jsou konstanty).

Protože dále víme, že $\langle x_i \rangle = \mu_i$ pro všechna $i = (1, \dots, n)$, platí zřejmě v rámci lineární aproximace (4.37)

$$\langle f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle = \langle f(\mu) \rangle + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu} \langle x_i \rangle - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu} \langle \mu_i \rangle$$

a nakonec

$$\langle f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle = f(\mu) . \quad (4.39)$$

Využitím výsledků (3.47) a poznatku, že disperze konstanty je nula, snadno vypočítáme disperzi náhodné veličiny (4.37)

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu}^2 \sigma_{x_i}^2 . \quad (4.40)$$

Proces linearizace (viz (4.37)) a využití vět o střední hodnotě a disperzi lineárních kombinací náhodných veličin umožňují tedy stanovit střední hodnotu a disperzi obecných funkcí náhodných veličin. Výsledek (4.40) bývá někdy označován jako „přenos nejistoty“, protože při znalosti nejistot jednotlivých veličin x_i umožňuje „přenést“ tyto nejistoty do nejistoty výsledné hodnoty $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

4.5 ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ NEPŘÍMÝCH MĚŘENÍ

Mějme tedy veličinu $y \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Předpokládejme dále, že jednotlivé nezávislé veličiny x_i byly měřeny a nalezeny odhady jejich správných hodnot \bar{x}_i , a nejistoty typu A podle (4.35). K odhadu střední hodnoty veličiny y , tedy hodnoty $f(\mu)$ použijeme vztah

$$\tilde{f}(\mu) = f(\tilde{\mu}) \equiv f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) . \quad (4.41)$$

Vzhledem k tomu, že odhady \bar{x}_i jsou náhodné veličiny, je i odhad (4.41) náhodnou veličinou a má tedy smysl ptát se po jeho střední hodnotě a disperzi. Odhad je nevychýlený, protože jeho střední hodnota

$$\langle f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \rangle = \langle f(\mu) \rangle + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu} \langle (\bar{x}_i - \mu_i) \rangle = f(\mu) .$$

Pro odhad disperze náhodné veličiny (4.41) použijeme, podobně jako v předcházejícím případě, její rozdělení na součet tří členů

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = f(\mu) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu} \mu_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu} \bar{x}_i ,$$

z nichž první dva jsou konstanty a třetí je lineární kombinací náhodných veličin \bar{x}_i . Tyto veličiny mají v případě měření s dostatečně vysokými objemy dat (počtem stupňů volnosti n_i) rozdělení blízké rozdělení normálnímu. Potom se dá ukázat (viz např. [15]), že odhad (4.41) je též (v rámci použité lineární aproximace) veličinou s normálním rozdělením. Střední hodnota tohoto odhadu je rovna střední hodnotě $f(\mu)$ (viz výše) a jeho disperze je

$$\sigma_f^2 \equiv \sigma_{f(\bar{\mu})}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{\mu}^2 \sigma_{\bar{x}_i}^2 . \quad (4.42)$$

Disperzi $\sigma_{\bar{x}_i}^2$ v (4.42) odhadneme s využitím výsledků jednotlivých měření podle (4.35)

$$\sigma_{\bar{x}_i}^2 \rightarrow (\tilde{\sigma}_{\bar{x}_i}^2)^* = (t_p(v_i) \frac{S_{x,i}}{\sqrt{n_i}})^2 ,$$

samozřejmě na téže hladině pravděpodobnosti, obvykle $P = 0.6827$.

Parciální derivace ve vztahu (4.42) bývají někdy nazývány „citlivostními koeficienty“, protože v celkovém výsledku určují „váhu“ jednotlivých příspěvků. Pro odhad vypočteme tyto derivace v bodech $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, takže výsledný odhad má tvar

$$\left(\tilde{\sigma}_f^2\right)^* = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n}^2 \left(t_P(\nu_i) \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_i}}\right)^2 . \quad (4.43)$$

Výsledek zapíšeme ve tvaru

$$y = f(\tilde{\mu}) \pm \tilde{\sigma}_f^* . \quad (4.44)$$

Interval nejistoty odpovídá určité hladině pravděpodobnosti, např. $P = 0,6827$, pokud všechna vstupní data, tedy hodnoty $(\tilde{\sigma}_{\bar{x}_i}^2)^*$ byla stanovena na téže hladině pravděpodobnosti. V opačném případě není možno výsledný interval nejistoty jednoduše stanovit a eventuální řešení, s uvažováním různé „váhy“ jednotlivých vstupních dat, opět přesahuje rámec úvodního textu.

Není-li zaručeno, že se jednotlivé veličiny x_i chovají podle normálního rozdělení, nemá ani veličina y normální rozdělení. Správnou (očekávanou) hodnotu je však i zde možno odhadnout pomocí aritmetických průměrů formulí (4.41). Odhad sice již není veličinou s normálním rozdělením, nicméně jeho střední hodnota je opět rovna správné hodnotě $f(\mu)$, protože střední hodnota (4.41) na tvaru statistických rozdělení nezávisí. Disperze odhadu je opět rovna lineární kombinaci disperzí (4.42)

$$\sigma_f^2 \equiv \sigma_{f(\tilde{\mu})}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\mu}^2 \sigma_{\bar{x}_i}^2 . \quad (4.45)$$

Problém je nyní v odhadu disperzí jednotlivých aritmetických průměrů vstupujících do formule (4.45). Pro veličiny, jejichž fluktuaace jsou statistické, tedy typu A, se často používá v souladu s doporučením normy postup využívající výsledky opakovaných nezávislých měření jednotlivých veličin, shodný s případem normálně rozdělených veličin, tedy

$$\sigma_{\bar{x}_i}^2 \rightarrow (\tilde{\sigma}_{\bar{x}_i}^2)^* = \left(t_P(\nu_i) \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n_i}}\right)^2 ,$$

což vede opět na formuli (4.43). O situaci, kdy musíme uvažovat též příspěvek měřicích přístrojů nebo metody, budeme diskutovat dále.

4.6 PŘÍSPĚVEK NEJISTOTY TYPU B

Možný vliv měřicího přístroje na výsledek měření byl diskutován v odst. 2.3. Byl zaveden pojem třídy přesnosti a vyloženy možnosti jeho zobecnění u přístrojů, u kterých není tento pojem rigorózně zaveden. Měřicí přístroje určité třídy přesnosti ovlivňují měřenou hodnotu veličiny x dodatečnou fluktuující veličinou Δ , která se aditivně skládá s okamžitou hodnotou měřené veličiny, takže při nezávisle opakovaném i -tém měření se měří hodnota

$$X_i = x_i + \Delta_i .$$

Veličina Δ se považuje obvykle (viz odst. 2.3) za náhodnou veličinu s rovnoměrným rozdělením a nulovou střední hodnotou. Míru fluktuací veličiny Δ charakterizuje standardní odchylka u_B , která také určuje třídu přesnosti měřicího přístroje.

Ve smyslu diskuze v odstavci 2.3 si nyní představme hypotetický experiment, při němž každé i -té měření veličiny x provedeme s fyzicky jiným přístrojem stejného typu a třídy přesnosti. Získané hodnoty X_i zpracujeme obvyklým způsobem. Aritmetický průměr hodnot X_i odhaduje dobře správnou hodnotu veličiny x , protože střední hodnota veličiny Δ je podle předpokladu nulová. Platí tedy

$$\langle X_i \rangle = \langle x_i \rangle .$$

Co se týče disperze měřené veličiny x , je zřejmé, že platí (např. podle (4.40))

$$\sigma_x^2 = \sigma_X^2 + \sigma_\Delta^2 .$$

Odhadneme-li disperzi veličiny Δ standardní odchylkou stanovenou z třídy přesnosti měřicího přístroje a vyhodnotíme-li z měřeného souboru standardní odchylku skutečně měřené veličiny X dostaneme

$$S_x^2 = S_X^2 + u_B^2 ,$$

což je formule ekvivalentní formuli (2.1).

Problémem je nyní praktická aplikovatelnost tohoto postupu. Při konkrétním měření nemáme obvykle pro každé opakované měření k dispozici jiný přístroj téhož typu a téže třídy přesnosti. Opakovaná měření provádíme s jedním a týmž přístrojem a je otázkou, zda fluktuace veličiny Δ mají v takovém případě stejný charakter a statistické parametry jako v případě využití různých přístrojů. Při používání ručkových elektromechanických (deprezských) měřicích přístrojů

může být například zdrojem fluktuace nepřesné uložení stupnice, nebo proměnný odpor (tření) v ložisku při otáčení cívky systému. Při hypotetickém použití celého souboru měřících přístrojů mají oba tyto zdroje fluktuací stejný charakter, tedy náhodných fluktuací. Při použití jediného přístroje však má například chybné uložení stupnice charakter chyby systematické, zatímco proměnný odpor v ložiscích má charakter chyby statistické.

Druhým problémem je význam hodnoty u_B . Způsob jejího stanovení (viz odst. 2.3) není příliš ustálen a u mnoha výrobců může jít o nejistotu „jediného měření“ podle (4.25). Statistické zpracování měřených hodnot X_i však dovoluje významně zpřesnit (snížit nejistotu) měření veličiny x s využitím standardní odchylky aritmetického průměru podle (4.32). Mezinárodní norma ISO, uvedená v úvodu kap. 2, však doporučuje vyhodnotit celkovou nejistoty podle vztahu (srovnej (2.1))

$$u_{c,x}^2 = u_{\bar{x},A}^2 + u_B^2, \quad (4.46)$$

kde $u_{\bar{x},A}^2$ je statisticky stanovitelná nejistota aritmetického průměru (viz 4.35) a u_B je výrobcem zadaná nebo dokonce experimentátorem odhadnutá nejistota měřícího přístroje, nebo metody. Zde je zřejmé, že v zájmu objektivity výsledku měření je vliv chyby měřícího přístroje nebo metody poměrně „robustně“ nadhodnocen.

V konečné formě má potom vztah pro zpracování výsledku nepřímých měření tvar (srovnej (4.43))

$$\left(\sigma_f^2\right)^* = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n}^2 u_{c,x_i}^2. \quad (4.47)$$

Formule (4.47), kterou doporučuje již zmíněná evropská norma, se používá bez ohledu na konkrétní charakter statistických rozdělení jednotlivých veličin. V řadě případů, zejména v situacích, kdy je možno vliv měřících přístrojů zanedbat a statistické výsledky byly získány z větších objemů dat, je vyhovujícím přiblížením. V ostatních případech je ji nutno chápat jako dohodnutý standardní postup. V konkrétních případech, zvláště při spojování nejistot typu A a B podle (4.46), je nutno pečlivě zvážit jednotlivé kroky postupu vzhledem ke konkrétnímu charakteru experimentu.

Jako příklad uveďme modelové měření tloušťky planparalelní destičky diskutované v odst. 4.3. Výpočet nejistoty typu A poskytl hodnotu

$$d = (1,260 \pm 0,037) \text{ mm} .$$

Pro posouzení vlivu nejistoty typu B způsobené konečnou přesností měřicího přístroje podle (4.46) je možno použít postup uvedený v odstavci 2.3. Při měření mikrometrem, je nejjemnější dělení stupnice $\Delta = 0,01 \text{ mm}$ a pro odhad veličiny u_B můžeme využít formuli (2.17)

$$u_B = \frac{\Delta}{2} = 0,005 \text{ mm} .$$

Při spojení obou výsledků podle (4.46)

$$u_c = \sqrt{u_{d,A}^2 + u_B^2} = \sqrt{(0,037)^2 + (0,005)^2} \cong 0,037$$

je zřejmé, že vliv měřicího přístroje je v tomto případě pod hranicí zaokrouhlovací chyby.

4.7 PŘÍKLAD - MĚŘENÍ VISKOZITY

Pro ilustraci metody zpracování výsledků nepřímých měření uvedeme dále modelové měření dynamické viskozity destilované vody pomocí Mariottovy láhve. Při měření protéká kapalina o viskozitě η kapilárou o vnitřním poloměru r a délce l za stálého přetlaku $p = \rho g h$, kde ρ , g a h jsou postupně hustota kapaliny (vody), výška jejího sloupce a tíhové zrychlení (blíže o metodě měření viz např. [10], odst. 2.5.3.). Viskozitu stanovíme ze vztahu

$$\eta = \frac{\pi r^4 p t}{8 V l} ,$$

kde V je objem kapaliny, který proteče kapilárou za dobu t . Pomocnými měřeními byly stanoveny

průměr kapiláry	$d = (1,29 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ m} ,$
délka kapiláry	$l = (147,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m} ,$
výška kapaliny	$h = (65,0 \pm 0,3) \cdot 10^{-3} \text{ m} .$

Dále se měřil čas t potřebný k tomu, aby kapilárou protekl objem kapaliny $V = (100 \pm 1) \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. Výsledky měření času jsou uvedeny v tab. 4.3. Střední hodnota naměřeného času je

$$\bar{t} = \frac{\sum_i t_i}{n} = \frac{1837,64 \text{ s}}{5} = 367,528 \text{ s} .$$

Tab. 4.3

Č. měř.	t (s)	$t - \bar{t}$ (s)	$(t - \bar{t})^2$ (s) ²
1	368,34	0,81	0,659344
2	366,4	-1,13	1,272384
3	368,58	1,05	1,106704
4	367,02	-0,51	0,258064
5	367,3	-0,23	0,051984
Suma	1837,64		3,348480

Podle (4.24) odhadneme nyní standardní odchylku měření času S_t ,

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{(5-1)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = \sqrt{\frac{3,348480}{(5-1)}} \text{ s}^2 = 0,91494 \text{ s} \cong 0,9 \text{ s} .$$

Srovnáním trojnásobku této hodnoty s odchylkami od střední hodnoty uvedenými ve třetím sloupci tab. 4.3. je zřejmé, že i bez opravy podle (4.34) není nutné žádnou z naměřených hodnot považovat za zatíženou hrubou chybou. Dále vypočteme obvyklým postupem standardní odchylku střední hodnoty

$$S_{\bar{t}} = \frac{S_t}{\sqrt{n}} = \frac{0,91494}{\sqrt{5}} \text{ s} = 0,40917 \text{ s}$$

a počet stupňů volnosti $\nu = n - 1 = 4$. V tabulce 4.1. nalezneme hodnotu $t_p(\nu)$ na hladině pravděpodobnosti $P = 0,6827$, tedy

$$t_{0,6827}(4) = 1,14 .$$

Po zaokrouhlení na dvě platné cifry máme podle (4.35)

$$t = (367,53 \pm 0,47) \text{ s} .$$

Tento statistický výsledek srovnáme ještě s přesností stopek. Měřili jsme například běžnými stopkami s nejjemnějším dělením stupnice po 0,1 s. Podle (2.17) odhadneme

$$u_B = \frac{\Delta}{2} = 0,05 \text{ s} ,$$

kde Δ je velikost nejjemnějšího dělení stupnice stopek. Je vidět, že nejistota vnesená dodatečně měřicím přístrojem je téměř řádově menší než statistická hodnota u_A a při spojení obou údajů podle (4.46) se neuplatní. V dalším postupu stanovíme hodnotu tlaku kapaliny $p = \rho g h$. Podle (4.41) je

$$\tilde{p} = \bar{\rho} \bar{g} \bar{h}$$

a podle (4.47) potom

$$u_{c,p}^2 = (\bar{g}\bar{h})^2 u_{c,\rho}^2 + (\bar{\rho}\bar{h})^2 u_{c,g}^2 + (\bar{\rho}\bar{g})^2 u_{c,h}^2 .$$

Dále je často výhodné pracovat s relativní nejistotou, pro kterou zde zřejmě platí

$$\eta_{c,p}^2 = \eta_{c,\rho}^2 + \eta_{c,g}^2 + \eta_{c,h}^2 .$$

Z uvedených výsledků měření je

$$\eta_{c,h} = 4,6 \cdot 10^{-3} .$$

Dále předpokládáme, že obě konstanty ρ a g jsou známy natolik přesně, že relativní nejistoty vznikající při zaokrouhlení jejich hodnot pro výpočet střední hodnoty tlaku jsou alespoň o řád menší, než relativní nejistota měření výšky sloupce kapaliny h . Je-li experiment proveden v Praze, je možné tíhové zrychlení zaokrouhlit na $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ s relativní zaokrouhlovací nejistotou $\eta_g \cong 5 \cdot 10^{-5}$ (viz diskuze v odst. 2.4.). Hustota destilované vody je uvedena např. v [10]. Při teplotě 20 °C a zaokrouhlení na $\rho = 998,2 \text{ kg m}^{-3}$ je relativní zaokrouhlovací chyba $\eta_\rho \cong 5 \cdot 10^{-6}$, tedy pod minimálně požadovaných $\eta_\rho \cong 5 \cdot 10^{-4}$. Relativní nejistota stanovení tlaku je potom dána nejistotou měření výšky sloupce kapaliny uvedenou výše. Po dosazení máme

$$\tilde{p} = 45,0447732 \text{ Pa}$$

s relativní nejistotou $\eta_{c,p} = 0,46 \%$. Tato relativní nejistota vede k absolutní hodnotě $u_{c,p} = 0,2 \text{ Pa}$, takže celkově máme pro hodnotu tlaku

$$p = (45,0 \pm 0,2) \text{ Pa} .$$

Po dosazení do vztahu pro viskozitu vypočítáme

$$\tilde{\eta} = 1,078683374 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-1}.$$

Pro stanovení nejistoty výsledku snadno spočítáme pro relativní nejistoty (s využitím např. (4.47))

$$\eta_{c,\eta}^2 = 16\eta_{c,d}^2 + \eta_{c,p}^2 + \eta_{c,t}^2 + \eta_{c,V}^2 + \eta_{c,l}^2.$$

Zde opět předpokládáme, že zaokrouhlovací chybu konstanty (π) je možno podle potřeby snížit tak, aby se v celkovém výsledku neprojevila. Dále je zapotřebí rozlišit označení relativní nejistoty a viskozity. Pro obě veličiny je tradičně zavedeno stejné označení. Nicméně v uvedených formulích je podle názoru autora textu rozlišení významu obou označení naprosto zřejmé a není tedy pro viskozitu nutno zavádět nový symbol. Relativní nejistoty jednotlivých veličin jsou postupně (viz výše)

$$\eta_{c,d} = 2,33 \% , \eta_{c,p} = 0,46 \% , \eta_{c,t} = 0,128 \% ,$$

$$\eta_{c,V} = 1,0 \% , \eta_{c,l} = 0,068 \% .$$

Po dosazení máme

$$\eta_{c,\eta} = 0,09320536 \rightarrow u_{c,\eta} = 0,1005390772 \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-1}$$

a po zaokrouhlení, tentokrát je při zaokrouhlení na jednu platnou číslici zaokrouhlovací chyba zanedbatelná, dostaneme konečně

$$\eta = (1,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} \text{ kg s}^{-1} .$$

Poměrně malá přesnost výsledku (10 %) je v našem případě způsobena nízkou přesností měření průměru kapiláry. Nejistoty ostatních hodnot do celkové nejistoty viskozity prakticky nepřispívají. Situace by se změnila pouze v případě, že bychom dokázali změřit průměr kapiláry alespoň o řád přesněji.

5. INTERPOLACE FUNKČNÍCH ZÁVISLOSTÍ

Experimentální fyzika se často zabývá verifikací fyzikálních zákonů, tedy studiem vzájemných závislostí fyzikálních veličin, které tyto zákony popisují. V konkrétním experimentu vybereme některou z veličin vstupujících do příslušného zákona jako veličinu závisle proměnnou y a veličiny ostatní x_i měníme ve vhodných intervalech hodnot vzhledem k podmínkám a vlastním cílům měření. V řadě diskretních nastavení nezávisle proměnných potom postupně měříme hodnoty závislé proměnné. Naměřenou diskretní funkční závislost poté interpolujeme spojitou funkcí, která hledanou závislost vyjadřuje. Tato funkční závislost má obvykle řadu parametrů, jejichž konkrétní hodnoty jsou pak výsledkem měření.

V nejjednodušším případě studujeme závislost veličiny y na jediné veličině x . Závislost nechť je popsána funkcí s řadou parametrů:

$$y = f_{a,b,c,\dots}(x) . \quad (5.1)$$

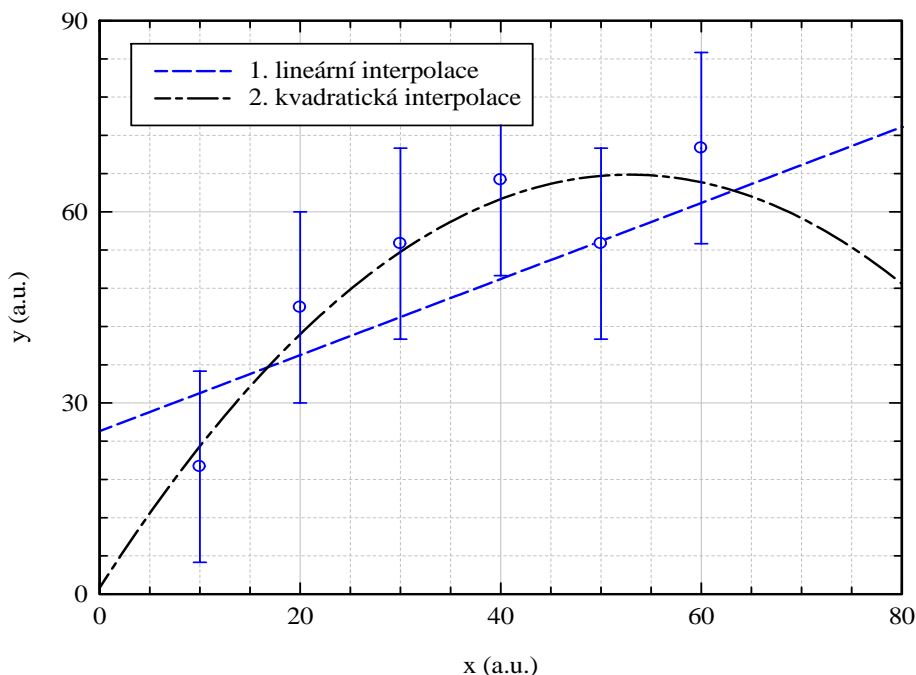
Cílem měření je odhadnout hodnoty parametrů, tedy stanovit veličiny $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \dots$, které se pokud možno s malým rozptylem přibližují „správným“ hodnotám.

V některých případech je možno měřenou závislost interpolovat „graficky“. Například u lineárních závislostí je možno proložit měřenou závislost přímkou nakreslenou podle kritéria, že přibližně stejný počet experimentálních bodů leží pod a nad přímkou. Odečtením směrnice této přímky a jejího průsečíku s osou y je možno parametry experimentální závislosti odhadnout. Nehledě na nejednoznačnost takového odhadu a na potíže s odhadem jeho nepřesnosti (nejistoty) je zřejmé, že tento „grafický“ způsob u komplikovanějších funkčních závislostí selhává. V praxi se tohoto způsobu „proložení“ funkčních závislostí používá pouze v případě, že jde o kvalitativní vyjádření naměřeného výsledku, například pro konstatování, že funkční závislost má v dané oblasti charakter klesající, nebo rostoucí. Při publikování měřené závislosti interpolované tímto způsobem je nutno v textu výslovně uvést, že čára interpolující měřenou závislost je pouhým „vodítkem pro oči“ (“guide for eyes”).

Vedle tohoto zjednodušeného „grafického“ způsobu prokládání funkčních závislostí se v praxi standardně používají metody početní, z nichž nejčastější je metoda nejmenších čtverců. Jejím základem je princip nejmenších čtverců, zmíněný již v předcházející kapitole při ukázce alternativního postupu pro odhad správné hodnoty měřené veličiny. Princip požaduje, aby suma čtverců odchylek naměřených hodnot y_i od hodnot $f_{a,b,c,\dots}(x_i)$, redukovanych s ohledem na přesnost měřených bodů, byla pro „správné hodnoty parametrů“ minimální.

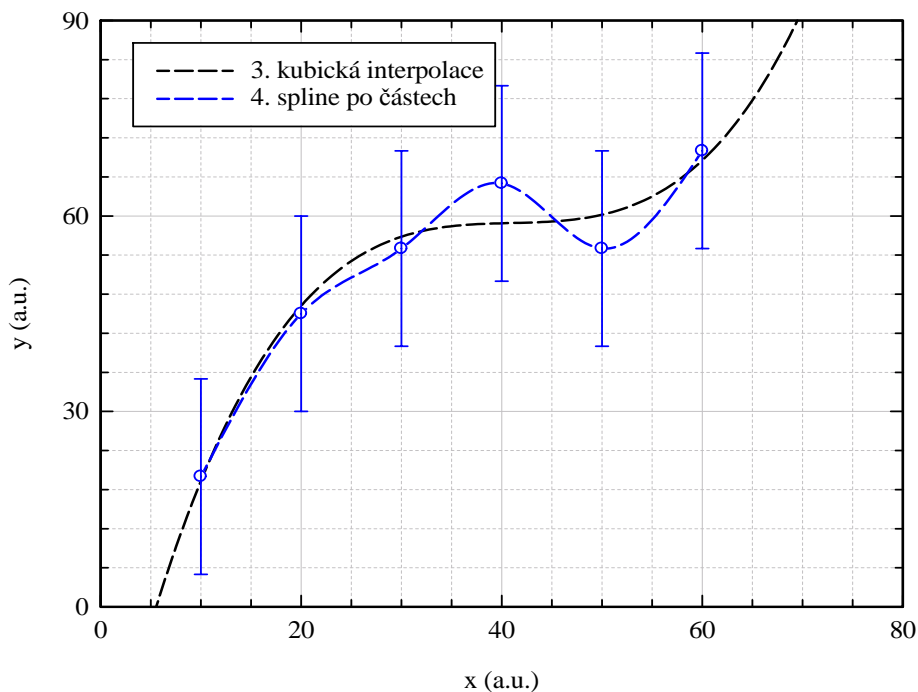
Metoda vždy vyžaduje, aby teoretický tvar funkční závislosti byl znám (viz dále). Pokud tomu tak není a je přesto vhodné funkční závislost alespoň kvalitativně proložit, je možno vedle již uvedeného „grafického“ způsobu použít i proložení metodou nejmenších čtverců s tím, že závislost prokládáme polynomem pokud možno nejnižšího stupně vzhledem k přesnosti měřených bodů. V odborné hantýrce hovoříme často o kvadratických nebo kubických „splinech“. Výraz vznikl z anglického slova „spline“, tedy v nejjednodušší verzi překladu křivka. V některých významech uvádějí anglické slovníky samotné

Obr. 5.1 K diskusi metody spline



slovo spline jako „kubickou interpolaci“. V dalším výkladu nebudeme metodu spline dále rozebírat, protože její význam je ve většině případů stejný jako význam zmíněné přibližné grafické interpolace prováděné „ručně“, nicméně je nutné upozornit na možnost závažných problémů, které mohou při mechanickém použití metody vzniknout. Předpokládejme, že měříme závislost, u které není teoretický tvar znám (viz Obr. 5.1). Proložíme-li experimentální závislost obecnou přímkou, získáme rostoucí čáru č. 1. Proložíme-li dále experimentální závislost funkcí kvadratickou (čára č. 2), získáme dojem, že měřená závislost má maximum. Závěr o existenci maxima je však vzhledem k přesnosti měřených bodů nepřesvědčivý a pro potvrzení jeho existence by bylo zapotřebí měření v širším oboru hodnot nezávisle proměnné x nebo „přesnější“ měření hodnot y . Aplikace kubického splinu přinese křivku č. 3 na obrázku 5.2.

Obr. 5.2 K výkladu metody spline



Proložená křivka má oproti kvadratické interpolaci naprosto odlišný charakter a její průběh je vzhledem k přesnosti měřených bodů ještě méně reálný než maximum „nalezené“ splinem kvadratickým. Ad absurdum jsou některé editory

schopny vytvořením kubických splinů „po částech“ vypočítat křivku č. 4., která je názorným příkladem toho, že při využívání metody spline je nutno postupovat velice opatrně a vždy mít na zřeteli, že jde pouze o kvalitativní vystižení měřené závislosti vzhledem k přesnosti měření. V našem konkrétním případě je zřejmé, že stačí interpolace lineární.

Pro kvantitativní vyhodnocení měřených funkčních závislostí metodami početní interpolace, je tedy podstatným předpokladem znalost explicitního tvaru studované závislosti

$$y = f_{a,b,c,\dots}(x) .$$

Neznámé jsou pouze hodnoty parametrů a, b, c, \dots . Dalším předpokladem, který budeme v celém dalším textu používat, je požadavek, aby přesnost nastavení hodnot nezávisle proměnné x_i byla řádově větší než přesnost měření hodnot závisle proměnné σ_{y_i} . Uvedený požadavek není principiální a v tomto textu se využívá pouze pro zjednodušení základního výkladu.

Mějme tedy k dispozici n dvojic naměřených hodnot (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Vytvoříme funkci „ χ -kvadrát“

$$\chi^2(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n \frac{(f_{a,b,c,\dots}(x_i) - y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} , \quad (5.2)$$

která je za již uvedených předpokladů funkcí hledaných parametrů a, b, c, \dots . Příspěvek jednotlivých členů v součtu (5.2) (rozdílů naměřených a teoretických hodnot) je tím významnější, čím přesněji (s menší hodnotou σ_{y_i}) je změřena příslušná hodnota y_i . Optimálním odhadem parametrů jsou podle principu nejmenších čtverců hodnoty

$$\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \dots , \quad (5.3)$$

pro které je funkce $\chi^2(a, b, c, \dots)$ minimální. Úlohou je tedy nalézt minimum funkce více proměnných a, b, c, \dots . V jednodušších případech je možno řešit úlohu analyticky, ve složitějších případech se řešení hledá numericky.

5.1 PŘÍMKA PROCHÁZEJÍCÍ POČÁTKEM

Ukažme nyní konkrétní postup v nejjednodušším případě jediného parametru pro lineární funkci, která z jasných fyzikálních důvodů prochází počátkem

$$y = f_a(x) = ax \quad . \quad (5.4)$$

V tomto případě je

$$\chi^2(a) = \sum_{i=1}^n \frac{(ax_i - y_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (5.5)$$

a úloha se redukuje na nalezení minima funkce jediné proměnné. Nutnou podmínkou pro existenci minima v bodě \tilde{a} je

$$\left(\frac{\partial \chi^2(a)}{\partial a} \right)_{\tilde{a}} = 0 \quad .$$

Snadno dále najdeme

$$\tilde{a} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i x_i}{\sigma_i^2}$$

a dále

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \quad . \quad (5.6)$$

Dále je možno snadno ukázat, že hodnota (5.6) skutečně odpovídá minimu funkce (5.5). Pro zjednodušení zápisu se někdy používá označení

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = XX', \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} = XY'$$

a formule (5.6) má potom jednoduchý tvar

$$\tilde{a} = \frac{XY'}{XX'} . \quad (5.6a)$$

Dosažením hodnot nezávislé proměnné x_i , naměřených hodnot y_i a známých hodnot σ_i je úloha vyřešena. Problém se může vyskytnout v případě, že hodnoty σ_i nejsou známé. Obecně pak nelze odhad (5.6a) vyčíslit. Výjimkou je situace, v praxi poměrně častá, kdy přesnost měřených hodnot sice není známa, je však možno předpokládat, že je ve všech měřených bodech stejná, tedy $\sigma_i = \sigma$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Potom platí

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} . \quad (5.7)$$

Pro zjednodušení zápisu se opět zavádí označení

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = XY, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = XX .$$

V této notaci je tedy

$$\tilde{a} = \frac{XY}{XX} . \quad (5.8)$$

Odhad (5.6a) je možno dále upravit na tvar

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} y_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{XX' \sigma_i^2} y_i , \quad (5.9)$$

z něhož je zřejmé, že odhad \tilde{a} je lineární kombinací náhodných veličin y_i , je tedy opět náhodnou veličinou a má smysl ptát se po jeho střední hodnotě

$$\langle \tilde{a} \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{XX' \sigma_i^2} \langle y_i \rangle .$$

Protože zřejmě platí $\langle y_i \rangle = a x_i$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$ dostaneme výsledek

$$\langle \tilde{a} \rangle = a .$$

Odhad parametru a ve tvaru (5.6a) je tedy nevychýlený.

Pro výpočet disperze odhadu (5.6a) použijeme úpravu (5.9) a větu o disperzi lineární kombinace náhodných veličin dokázanou v kap. 3 (vztah (3.60)). Podle této věty platí

$$D_{\tilde{a}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{XX'} \right)^2 D_{y_i} .$$

Uvážíme-li dále, že $D_{y_i} = \sigma_i^2$ dostaneme snadno

$$D_{\tilde{a}} = \frac{1}{XX'} . \quad (5.10)$$

V případě odhadu (5.7) platí $\sigma_i^2 = \sigma_y^2$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, což vede na

$$D_{\tilde{a}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{XX} \right)^2 \sigma_i^2 = \frac{\sigma_y^2}{XX} . \quad (5.10a)$$

Neznámou disperzi σ_y^2 , stejnou pro všechny měřené body, je možno odhadnout ze souboru naměřených hodnot (x_i, y_i) . V analogii s případem jedné proměnné diskutovaným v kap. 4 použijeme n hodnot odchylek naměřených hodnot y_i od odhadnutých správných hodnot $\tilde{a} x_i$, které jsou při provedeném měření funkční závislosti k dispozici. Tento soubor odchylek je ekvivalentní souboru odchylek od aritmetického průměru, používaného v případě n násobně opakovaného měření jediné veličiny. Odhadem disperze je potom, podobně jako v případě měření jediné veličiny, aritmetický průměr součtu čtverců těchto odchylek

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a} x_i)^2 \equiv \frac{R_1^2}{n} . \quad (5.11)$$

Veličina R_1^2 je minimální suma čtverců odchylek. Podobně jako v případě měření jediné veličiny lze ukázat, že odhad je vychýlený. K tomu vypočítáme jeho střední hodnotu

$$\langle \tilde{\sigma}_y^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle y_i^2 \rangle - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \langle y_i \tilde{a} x_i \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\tilde{a} x_i)^2 \rangle.$$

S využitím předpokladů o charakteru veličin x_i a y_i , tedy

$$\langle y_i \rangle = a x_i, \quad \langle y_i^2 \rangle = \sigma_y^2 + \langle y_i \rangle^2 = \sigma_y^2 + a^2 x_i^2, \quad D_{x_i} = 0, \quad c_{y_i y_j} \equiv c_{ij} = 0$$

dostaneme postupně pro jednotlivé části střední hodnoty odhadu

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle y_i^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_y^2 + \langle y_i \rangle^2) = \sigma_y^2 + \frac{1}{n} a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \boxed{\sigma_y^2 + \frac{1}{n} a^2 XX},$$

$$\begin{aligned} -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \langle y_i \tilde{a} x_i \rangle &= -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{x_j y_j}{XX} y_i x_i \right\rangle = \\ &= -\frac{2}{n XX} \left(\sum_{i=1}^n \langle x_i^2 y_i^2 \rangle + 2 \sum_{i < j} \langle x_i y_i x_j y_j \rangle \right) = \\ &= -\frac{2}{n XX} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 (\sigma_y^2 + \langle y_j \rangle^2) + 2 \sum_{i < j} x_i x_j (c_{ij} + \langle y_i \rangle \langle y_j \rangle) \right) = \\ &= -\frac{2\sigma_y^2}{n XX} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n XX} \left(\sum_{i=1}^n a^2 x_i^4 + 2 \sum_{i < j} a^2 x_i^2 x_j^2 \right) = -\frac{2\sigma_y^2}{n} - \frac{2a^2}{n XX} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 = \\ &= \boxed{-\frac{2\sigma_y^2}{n} - \frac{2}{n} a^2 XX}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle (\tilde{a} x_i)^2 \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\langle \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j y_j}{XX} x_i \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{n XX^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left\langle \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{n XX^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left\langle \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 y_j^2 + \sum_{j < k} x_j x_k y_j y_k \right) \right\rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n \text{XX}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 (\sigma_y^2 + \langle y_j \rangle^2) + \sum_{j < k} x_j x_k (c_{jk} + \langle y_j \rangle \langle y_k \rangle) \right) = \\
&= \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{1}{n \text{XX}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\sum_{j=1}^n a^2 x_j^4 + \sum_{j < k} a^2 x_j^2 x_k^2 \right) = \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{a^2}{n \text{XX}^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^2 = \\
&= \boxed{\frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{a^2}{n} \text{XX}} .
\end{aligned}$$

Celkově je potom

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{\sigma}_y^2 \rangle &= \sigma_y^2 + \frac{1}{n} a^2 \text{XX} - \frac{2\sigma_y^2}{n} - \frac{2}{n} a^2 \text{XX} + \frac{\sigma_y^2}{n} + \frac{1}{n} a^2 \text{XX} = \\
&= \sigma_y^2 - \frac{\sigma_y^2}{n} = \boxed{\sigma_y^2 \left(\frac{n-1}{n} \right)}
\end{aligned}$$

Nevychýleným odhadem je tedy hodnota

$$\left(\tilde{\sigma}_y^2 \right)^* = \frac{n}{n-1} \tilde{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a}x_i)^2 \equiv \frac{R_1^2}{n-1} . \quad (5.12)$$

Spojením (5.10a) a (5.12) získáme často využívaný vztah pro nevychýlený odhad disperze veličiny \tilde{a} za situace, kdy neznáme disperze jednotlivých měřených hodnot σ_i^2 , nicméně můžeme předpokládat, že $\sigma_i^2 = \sigma^2$ ve všech měřených bodech

$$D_{\tilde{a}}^* \equiv \left(\tilde{\sigma}_{\tilde{a}}^2 \right)^* = \frac{(\tilde{\sigma}_y^2)^*}{\text{XX}} = \frac{1}{\text{XX}} \frac{R_1^2}{n-1} . \quad (5.13)$$

5.2 PŘÍKLAD - MĚŘENÍ TUHOSTI PRUŽINY

Jako ilustraci k vyloženému způsobu interpolace přímky procházející počátkem uvádíme zpracování měření tuhosti pružiny. Data použitá v tomto příkladu byla získána měřením konkrétní úlohy ve fyzikálním praktiku z „Mechaniky a molekulové fyziky“ v kurzu základního praktika na MFF UK.

Při určování tuhosti pružiny k statickou metodou vycházíme z Hookova zákona pro pružinu

$$|F| = k |y| ,$$

kde F je působící síla realizovaná závažím o hmotnosti m a y je prodloužení pružiny.

V samotném experimentu měříme ovšem statické prodloužení pružiny v závislosti na zatížení

$$y = a m .$$

Dále je zřejmé, že konstanta úměrnosti a souvisí s hledanou tuhostí pružiny vztahem

$$k = \frac{g}{a} .$$

Z povahy úlohy je zřejmé, že jde o interpolaci lineární závislosti přímkou procházející počátkem. Hmotnost m je realizována závažími, jejichž přesnost je výrazně vyšší, než je přesnost odečítání prodloužení pružiny y . Úloha tedy splňuje předpoklady použité ve výše uvedené diskuzi. Chybu veličiny y nechť je možno ve všech měřených bodech považovat za stejnou.

Měřením prodloužení pružiny v závislosti na působící síle (tíže závaží) byly získány hodnoty uvedené v tab. 5.1

Tab. 5.1

m [g]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
y [cm]	0	2,5	4,7	7,1	9,4	11,7	13,7	17	18,4	19,7

m [g]	50	55	60	70	80	90	100	110	120	130
y [cm]	22,8	25	27,1	31,3	34,8	39,9	44,5	48,5	52,9	57,3

Pro zpracování závislosti $y = am$ je nejlépe uspořádat měřené hodnoty do tabulky např. v editoru Excel (viz níže tab. 5.2.). Editor umožňuje jednoduše vytvořit veličiny potřebné pro výpočet podle (5.8). Hodnoty XY a XX jsou vypočteny v posledním řádku tabulky. Vypočítáme tedy

$$\tilde{a} = \frac{XY}{XX} = \frac{39564,00 \text{ g cm}}{89050,00 \text{ g}^2} = 0,4443 \text{ cm g}^{-1} .$$

Využitím vypočtené hodnoty \tilde{a} vytvoříme poslední sloupec tabulky a sečtením řádků získáme minimální sumu čtverců odchylek R_1^2 (viz výše). Dále stanovíme podle (5.13) disperzi hodnoty \tilde{a}

Tab. 5.2

Č. měř.	m (x _i) (g)	y _i (cm)	x _i y _i (g cm)	x _i x _i (g ²)	(\tilde{a} x _i - y _i) ² (cm) ²
1	0,00	0,00	0,00	0,0	0
2	5,00	2,50	12,50	25,0	0,0775623
3	10,00	4,70	47,00	100,0	0,066049
4	15,00	7,10	106,50	225,0	0,1896603
5	20,00	9,40	188,00	400,0	0,264196
6	25,00	11,70	292,50	625,0	0,3510562
7	30,00	13,70	411,00	900,0	0,137641
8	35,00	17,00	595,00	1225,0	2,1010503
9	40,00	18,40	736,00	1600,0	0,394384
10	45,00	19,70	886,50	2025,0	0,0861422
11	50,00	22,80	1140,00	2500,0	0,342225
12	55,00	25,00	1375,00	3025,0	0,3175323
13	60,00	27,10	1626,00	3600,0	0,195364
14	70,00	31,30	2191,00	4900,0	0,039601
15	80,00	34,80	2784,00	6400,0	0,553536
16	90,00	39,90	3591,00	8100,0	0,007569
17	100,00	44,50	4450,00	10000,0	0,0049
18	110,00	48,50	5335,00	12100,0	0,139129
19	120,00	52,90	6348,00	14400,0	0,173056
20	130,00	57,30	7449,00	16900,0	0,210681
<i>n</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>XY</i>	<i>XX</i>	<i>R₁²</i>
20	1090,00	488,30	39564,00	89050,0	5,6513345

$$D_{\tilde{a}}^* \equiv (\tilde{\sigma}_{\tilde{a}}^2)^* = \frac{1}{XX} \frac{R_1^2}{n-1} = \frac{1}{89050,0} \frac{5,65133}{19} \text{cm}^2 \text{g}^{-2} = 3,34011 \cdot 10^{-6} \text{cm}^2 \text{g}^{-2} .$$

Po zaokrouhlení, odmocnění disperze a úpravě na jednotky systému SI dostaneme

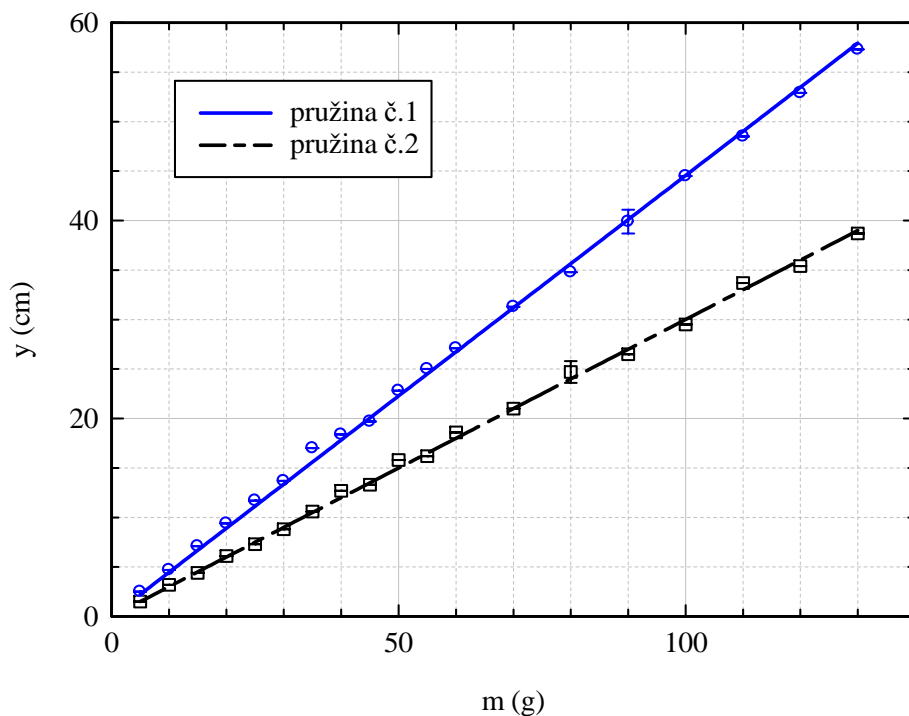
$$\tilde{a} = (4,443 \pm 0,018) \text{m kg}^{-1} .$$

Pro výpočet hledané tuhosti využijeme hodnotu gravitačního zrychlení zaokrouhlenou tak, aby zaokrouhlovací chyba byla nejméně o řád menší, než chyba hodnoty \tilde{a} . Podle údajů v odstavci 2.4 je při zaokrouhlení gravitačního zrychlení na hodnotu $g = 9,81$ relativní zaokrouhlovací chyba $\eta_g = 5 \cdot 10^{-5}$. Protože relativní chyba hodnoty \tilde{a} je $\eta_{\tilde{a}} \cong 4 \cdot 10^{-3}$, je možno zaokrouhlovací chybu gravitačního zrychlení zanedbat. Po výpočtu

$$\tilde{k} = (2,208 \pm 0,009) \text{Nm}^{-1} .$$

Výsledky měření prodloužení pružiny v závislosti na zatížení znázorníme ještě

Obr. 5.3 Prodloužení pružiny v závislosti na zatížení



graficky (pružina č. 1 na obr. 5.3). Barevné rozlišení křivek na obr. 5.3 je zde provedeno pro větší názornost. V praxi se většinou nepoužívá, není však žádnou normou zakázáno. Při konstrukci obrázku postupujeme podle následujících zásad:

1. Zobrazený interval hodnot na ose x a na ose y by měl pokud možno odpovídat rozsahu měřených hodnot.
2. Osy grafu musí být popsány označením měřených veličin s uvedením příslušných jednotek.
3. Osy se dělí v pravidelných intervalech hodnot bez ohledu na konkrétní měřené hodnoty. Souřadnice měřených bodů se na osách nevyznačují.
4. Měřené body se vyznačí vhodným symbolem. U každého bodu by měla být vyznačena nejistota svislými úsečkami o velikosti σ_y . V případě, kdy se předpokládá u všech měřených bodů stejná nejistota, stačí vyznačit interval nejistoty pouze u jediného bodu. V našem konkrétním případě je nejistota vyznačena u bodů se souřadnicemi $m = 80$ g a $m = 90$ g. Pokud je interval nejistoty menší, než je rozměr symbolů vyznačujících měřené hodnoty, je možné interval nejistoty nevyznačit a v textu konstatovat, že je menší, než velikost symbolů.
5. V případě, že vynášíme do jediného grafu výsledky různých měření (např. křivka č. 2 na obr. 5.3), je nutno použít odlišných symbolů a graf opatřit legendou.
6. Proložené křivky jsou optimální závislosti získané fitem metodou nejmenších čtverců. Parametry fitů se mohou uvést do grafu nebo jsou uvedeny v doprovodném textu.
7. Graf je opatřen názvem a číslem grafu.

Pro prezentaci se grafy zhotovují buď „ručně“ na papír s pravidelným rastrem (milimetrový papír), nebo se s využitím modernější techniky zhotovují pomocí grafických editorů s následným vytištěním.

5.3 POLYNOM k-tého STUPNĚ

Další nejjednodušší funkcí se dvěma parametry je obecná přímka, která je polynodem prvního stupně. Proberme tedy nejprve obecný způsob řešení pro polynom k-tého stupně a řešení pro přímku se dvěma parametry poté jako speciální případ tohoto řešení obecného. Mějme tedy polynom k-tého stupně ve tvaru

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \quad (5.14)$$

Stupeň polynomu musí být z jasných fyzikálních důvodů jednoznačně stanoven a není tedy parametrem úlohy. Funkce χ^2 (viz 5.2) je nyní funkcí $k + 1$ parametrů a_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, k$). Podmínkou minima funkce χ^2 je současné splnění podmínek

$$\left(\frac{\partial \chi^2(a_0, a_1, \dots, a_k)}{\partial a_i} \right)_{\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k} = 0 \quad ,$$

což vede na soustavu $k + 1$ rovnic o $k + 1$ neznámých a_i :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \dots + \tilde{a}_k \sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} \\ \tilde{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} + \dots + \tilde{a}_k \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \\ \dots & \\ \dots & \\ \tilde{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{\sigma_i^2} + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{k+1}}{\sigma_i^2} + \dots + \tilde{a}_k \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{2k}}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i^k y_i}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Řešením soustavy rovnic (5.15) jsou hledané odhady koeficientů \tilde{a}_i , které lze vyjádřit jednoduchým způsobem ve tvaru

$$\tilde{a}_i = \frac{Det_i}{Det_s} \quad , \quad (5.16)$$

kde Det_s je determinant soustavy a Det_i je determinant soustavy s i -tým sloupcem nahrazeným příslušným sloupcem pravých stran matice (5.15). Odhady (5.16) jsou funkcí náhodných veličin y_i , jsou tedy opět náhodnými veličinami a je nutné znát jejich disperzi. Nalezení disperzí je však komplikovaná úloha, protože závislost odhadů (5.16) na náhodných veličinách y_i je obecně nelineární. Jedinou výjimkou je případ polynomu prvního stupně, obecné přímky, který bude podrobněji vyřešen v následujícím odstavci.

5.4. OBECNÁ PŘÍMKA

Mějme přímku ve tvaru

$$y = f_{a_0, a_1}(x) = a_0 + a_1 x \quad . \quad (5.17)$$

Soustava rovnic (5.15) se nyní redukuje na

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} \\ \tilde{a}_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \quad . \end{aligned}$$

Pro zjednodušení zápisu označme podobně jako výše

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} = S', \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2} = X', \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sigma_i^2} = Y' \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = XX', \quad \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} = YY', \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} = XY' \quad . \end{aligned} \quad (5.18)$$

Determinant soustavy rovnic (5.17) má v této notaci tvar

$$Det_s = \begin{vmatrix} S' & X' \\ X' & XX' \end{vmatrix} = S'.XX' - X'^2 \quad . \quad (5.19)$$

Ostatní determinanty potřebné pro výpočet koeficientů \tilde{a}_0 a \tilde{a}_1 jsou potom

$$Det_{\tilde{a}_0} = Y'.XX' - X'.XY', \quad Det_{\tilde{a}_1} = S'.XY' - X'.Y' \quad (5.20)$$

a výsledné odhady potom:

$$\tilde{a}_0 = \frac{Y'.XX' - X'.XY'}{S'.XX' - X'^2} \quad , \quad (5.21)$$

$$\tilde{a}_1 = \frac{S'.XY' - X'.Y'}{S'.XX' - X'^2} \quad . \quad (5.22)$$

Se znalostí hodnot x_i, y_i a disperzí σ_i^2 je možno odhady (5.21) a (5.22) konkrétně vyčíslit.

Pro výpočet střední hodnoty odhadů a jejich disperze upravíme vztahy (5.21) na formu lineárních kombinací náhodných veličin y_i . Pro odhad (5.21) parametru \tilde{a}_0 dostaneme:

$$\tilde{a}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{S'.XX' - X'^2} \left(\frac{XX'}{\sigma_i^2} \cdot y_i - \frac{X'.x_i}{\sigma_i^2} \cdot y_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{XX' - X'.x_i}{S'.XX' - X'^2} y_i \quad . \quad (5.23)$$

V uvažované aproximaci, kdy zanedbáváme disperzi veličin x_i oproti disperzi veličin y_i je možno veličiny S', X' a XX' chápat jako konstanty. Protože podobně jako v případě jediného parametru opět platí $\langle y_i \rangle = a_0 + a_1 x_i$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$, je střední hodnota (5.23)

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}_0 \rangle &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{XX' - X'.x_i}{S'.XX' - X'^2} \langle y_i \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{XX' - X'.x_i}{S'.XX' - X'^2} (a_0 + a_1 x_i) = \\ &= a_0 \frac{S'.XX' - X'^2}{S'.XX' - X'^2} + a_1 \frac{XX'.X' - X'.XX'}{S'.XX' - X'^2} = a_0 \quad . \end{aligned}$$

Odhad je tedy podle očekávání nevychýlený.

Pro disperzi odhadu (5.21) dostaneme užitím (5.23) a (3.47)

$$D_{\tilde{a}_0} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \frac{XX' - X'.x_i}{S'.XX' - X'^2} \right)^2 D_{y_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \frac{XX' - X'.x_i}{S'.XX' - X'^2} \right)^2 \sigma_i^2 \quad (5.24)$$

a dále po snadné úpravě

$$D_{\tilde{a}_0} = \frac{XX'}{S'.XX' - X'^2} \quad (5.25)$$

V případě odhadu parametru \tilde{a}_1 je možno podobně jako v předchozím případě parametru \tilde{a}_0 vyjádřit odhad (5.22) ve tvaru lineární kombinace náhodných veličin y_i (srovnej (5.23))

$$\tilde{a}_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{S'.x_i - X'}{S'.XX' - X'^2} y_i \quad ,$$

vypočítat jeho střední hodnotu a ukázat, že i odhad parametru (5.22) je odhadem nevychýleným (viz seminární úloha 5.1). Při výpočtu disperze odhadu \tilde{a}_1 použijeme obdobně jako v případě parametru \tilde{a}_0 větu (3.47) a snadno dostaneme

$$D_{\tilde{a}_1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma_i^2} \frac{S'.x_i - X'}{S'.XX' - X'^2} \right)^2 D_{y_i} \quad (5.26)$$

a dále (viz seminární úloha 5.2)

$$D_{\tilde{a}_1} = \frac{S'}{S'.XX' - X'^2} \quad (5.27)$$

Pokud jsou tedy známy hodnoty (nastavovaných) hodnot x_i , hodnoty naměřených hodnot y_i a jejich disperze σ_i je úloha, tedy nalezení odhadů parametrů obecné lineární závislosti a jejich disperzí, podobně jako v případě jediného parametru, snadno řešitelná.

V případě, že disperse jednotlivých měřených hodnot σ_i nejsou známe, je další postup možný, obdobně jako v případě jediného parametru, pouze za předpokladu, že neznámé disperse jsou pro všechny body stejné. Je-li tedy možno předpokládat, že $D_i = D \equiv \sigma^2$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, potom analogicky k (5.7) platí

$$\tilde{a}_0 = \frac{Y \cdot XX - X \cdot XY}{n \cdot XX - X^2}, \quad \tilde{a}_1 = \frac{n \cdot XY - X \cdot Y}{n \cdot XX - X^2}, \quad (5.28)$$

kde je obdobně k (5.18):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= X, & \sum_{i=1}^n y_i &= Y, & \sum_{i=1}^n x_i^2 &= XX, \\ \sum_{i=1}^n y_i^2 &= YY, & \sum_{i=1}^n x_i y_i &= XY. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Pro výpočet střední hodnoty a disperse, například odhadu \tilde{a}_0 , provedeme obdobně jako v případě rovnice (5.23) úpravu

$$\tilde{a}_0 = \sum_{i=1}^n \frac{XX - X \cdot x_i}{n \cdot XX - X^2} y_i. \quad (5.30)$$

Je možno snadno ukázat, že i v tomto případě je odhad nevychýlený, tedy

$$\langle \tilde{a}_0 \rangle = a_0$$

a pro jeho disperzi platí analogicky k (5.25)

$$D_{\tilde{a}_0} = \frac{XX}{n \cdot XX - X^2} D_y. \quad (5.31)$$

Postupem analogickým k postupu prezentovanému v případě jediného parametru je možno neznámou disperzi D odhadnout pomocí nejmenší sumy čtverců odchylek

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)^2 \equiv \frac{R_2^2}{n} . \quad (5.32)$$

Odhad je stejně jako v předcházejícím případě vychýlený (viz seminární úloha 5.5). Nevychýleným odhadem disperze je v tomto případě (dvou parametrů) veličina

$$\tilde{D}^* \equiv (\tilde{\sigma}^2)^* = \frac{R_2^2}{n-2} . \quad (5.33)$$

Po dosazení do (5.31) je nevychýleným odhadem disperze parametru \tilde{a}_0 v tomto případě

$$\tilde{D}_{\tilde{a}_0}^* \equiv (\sigma_{\tilde{a}_0}^2)^* = \frac{XX}{n.XX - X^2} \frac{R_2^2}{n-2} . \quad (5.34)$$

V případě odhadu směrnice přímky, tedy parametru \tilde{a}_1 , upravíme (5.28) analogicky k (5.30)

$$\tilde{a}_1 = \sum_{i=1}^n \frac{n.x_i - X}{n.XX - X^2} y_i .$$

Snadno dokážeme (viz seminární úloha 5.4), že i v tomto případě je odhad odhadem nevychýleným a pro jeho disperzi máme analogicky k (5.31)

$$D_{\tilde{a}_1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{n.x_i - X}{n.XX - X^2} \right)^2 D_{y_i} = \frac{n}{n.XX - X^2} D . \quad (5.35)$$

Odhadneme-li opět disperzi zbytkovou sumou čtverců odchylek podle (5.33), máme

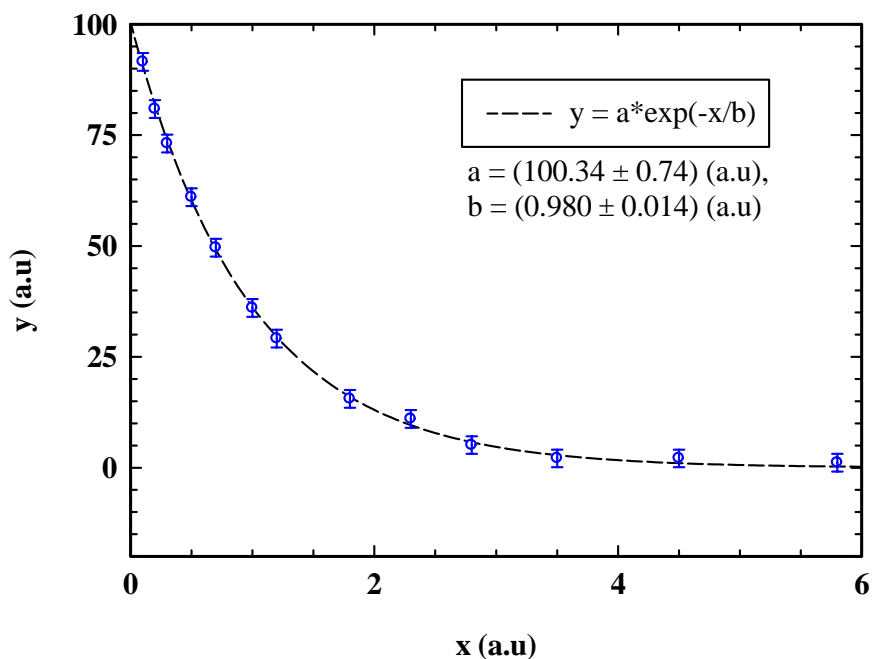
$$\tilde{D}_{\tilde{a}_1}^* \equiv (\sigma_{\tilde{a}_1}^2)^* = \frac{n}{n.XX - X^2} \frac{R_2^2}{n-2} . \quad (5.36)$$

5.5 MOŽNOSTI VYUŽITÍ TRANSFORMACE SOUŘADNIC

V případě obecnějších funkcí s jedním nebo více parametry nebo v případě polynomů vyšších stupňů nelze použít již nalezené výsledky s výjimkou funkcí, které se dají vhodnou transformací souřadnic převést na funkce lineární. Klasickým případem je funkce exponenciální. Měříme-li například závislost typu

$$y = a e^{-bx} \tag{5.37}$$

Obr. 5.4 K výkladu možnosti transformace souřadnic



a máme k dispozici n trojic hodnot x_i , y_i a σ_i pro $i = 1, \dots, n$ (obr. 5.4), potom provedeme logaritmickou transformaci

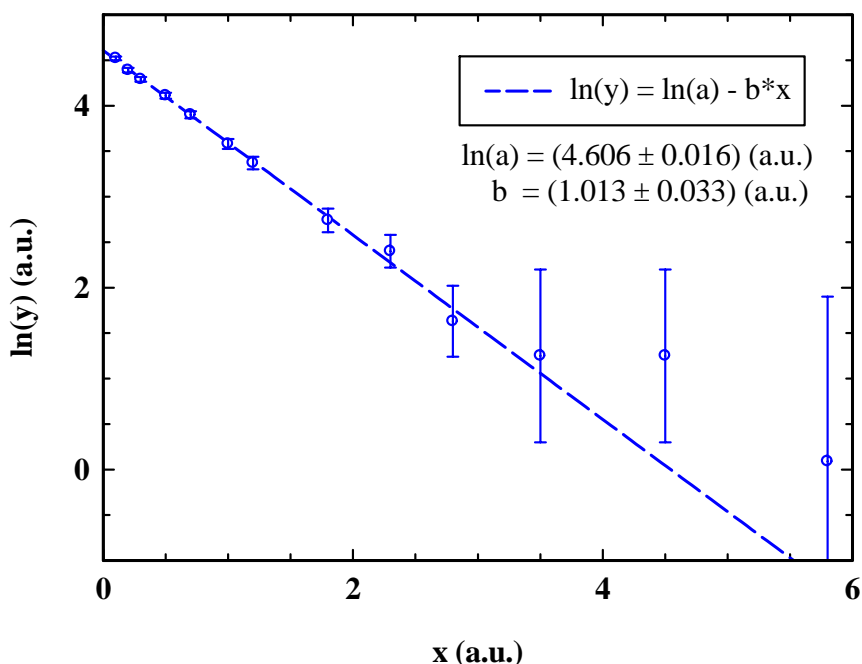
$$\ln y = \ln a - b x \quad ,$$

kteřá problém linearizuje, a dále je možno využít uvedených výsledků pro obecnou přímkou. Pro odhad parametrů vytvoříme nové hodnoty

$$Y_i = \ln y_i, \quad \Sigma_i = \left| \left(\frac{\partial \ln y}{\partial y} \right)_{y_i} \right| \sigma_i . \quad (5.38)$$

Je-li přesnost měření veličiny y ve všech bodech stejná, což je konkrétní situace příkladu na obr. 5.4, je nutno pro explicitní řešení užít vztahy (5.21), (5.22) a posléze (5.25), (5.27), protože transformace (5.38) původně stejné hodnoty σ_i

Obr. 5.5 K výkladu možnosti využití transformace souřadnic



změní. Situace je znázorněna na dalším obrázku 5.5. Je zřejmé, že nejistota některých hodnot y vlivem transformace souřadnic enormně vzroste, nicméně s užitím již uvedených obecných formulí, které tuto situaci postihují, dostaneme výsledky uvedené v obr. 5.5. Tyto výsledky (viz např. hodnotu parametru b) se

s uvážením intervalů nejistoty shodují s výsledky získanými přímým fitem experimentálních dat provedeným grafickým editorem (viz obr. 5.4) postupem diskutovaným dále v odst. 5.6.

Mohlo by se tedy na první pohled zdát, že transformace souřadnic pro lineari- zaci fitu s cílem využití explicitních formulí pro výpočet parametrů uvedených v odst. 5.4 nemá valný smysl, protože moderní editory umožňují nalézt paramet- ry přímým fitem neupravených experimentálních dat, podobně jako v obr. 5.4 (viz čárkovaná křivka a uvedené hodnoty parametrů). V některých případech však grafické editory s potřebným softwarovým vybavením nemusí být k dispo- zici, jindy je pouze zapotřebí se přesvědčit, zda měřená závislost má předpoklá- daný charakter. Například při užití moderních číslicových metod zlepšování poměru signálu a šumu se využívá digitalizace analogového šumového napětí a jeho následné sumace při opakovaných nezávislých měřeních. Střední hodnota efektivního šumového napětí se s počtem sumací n snižuje jako

$$\bar{u}_{n,ef} \approx \frac{1}{\sqrt{n}} .$$

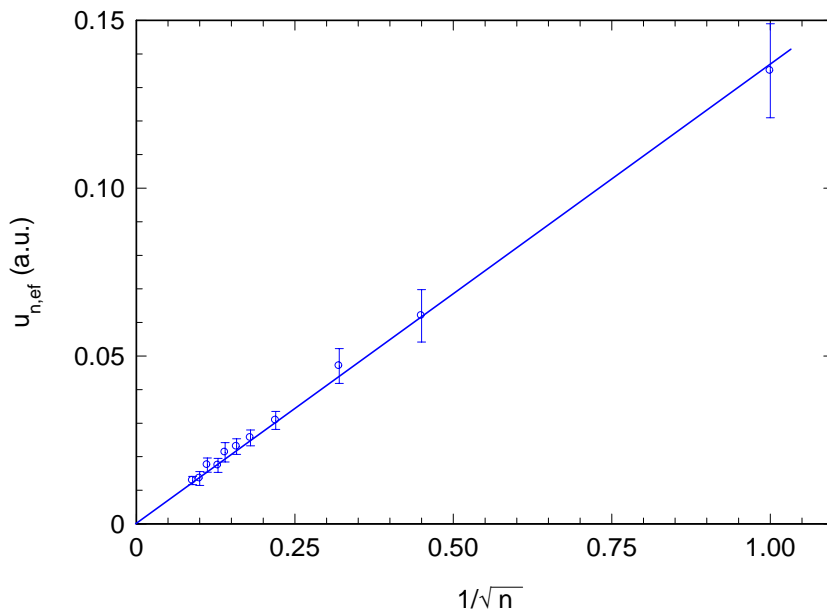
Zajímá-li nás například pouze ověření tohoto významného zákona (viz také odst. 3.5), aniž požadujeme hodnotu konstanty úměrnosti, která je složitou funkcí konkrétního uspořádání aparatury a nemá přímou fyzikální interpretaci, postačí vytvořit graf závislosti efektivního šumového napětí $\bar{u}_{n,ef}$ na veličině

$$\frac{1}{\sqrt{n}} .$$

Požadovaným ověřením studovaného zákona je lineární závislost procházející počátkem (obr. 5.6), což je v uvedeném příkladu zřejmé prostým proložením přímkou „ručně“. (Data pro uvedený příklad byla získána při řešení úlohy o základech techniky NMR ve IV. kurzu fyzikálního praktika na MFF UK).

V případe složitějších funkcí nebo v případe funkcí s větším počtem paramet- rů se pro nalezení odhadů parametrů, hledají minima funkce $\chi^2(a, b, c, \dots)$ nu- merickými metodami. Disperze příslušných odhadů se stanoví využitím obec- ných vlastností funkce χ^2 v okolí těchto minim. Postup je podrobněji diskutován v následujícím odstavci.

Obr. 5.6 Střední hodnota efektivního šumového napětí v závislosti na počtu sumací



5.6 ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ

Uvažujme nejprve nejjednodušší případ lineární funkce s jediným parametrem ve tvaru (5.4). Příslušná funkce χ^2 má tvar

$$\chi^2(a) = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - ax_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (5.39)$$

a je pro daný soubor hodnot x_i , y_i a σ_i funkcí parametru a . Funkce je parabolou, která má minimum v bodě \tilde{a}

$$\tilde{a} = \frac{XY'}{XX'}$$

(srovnej (5.6a)). Amplituda funkce (5.39) v bodě \tilde{a} je

$$\chi^2(\tilde{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \tilde{a}x_i)^2}{\sigma_i^2} = YY' - \frac{XY'^2}{XX'}$$

Funkci (5.39) rozvineme v malém okolí bodu \tilde{a} v mocninnou řadu a ponecháme jen členy do druhého řádu (v konkrétním případě paraboly jsou členy vyšších řádů samozřejmě nulové). První derivace v rozvoji (5.40) jsou vzhledem k podmínce minima nulové

$$\chi^2(a) = \chi^2(\tilde{a}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \chi^2(a)}{da^2} \right)_{\tilde{a}} (a - \tilde{a})^2 \quad (5.40)$$

Amplituda funkce (5.40) v bodě

$$a' = \tilde{a} \pm \sigma_{\tilde{a}}$$

je potom

$$\chi^2(a') = \chi^2(\tilde{a}) + XX' \sigma_{\tilde{a}}^2$$

Dosažením (5.10) získáme

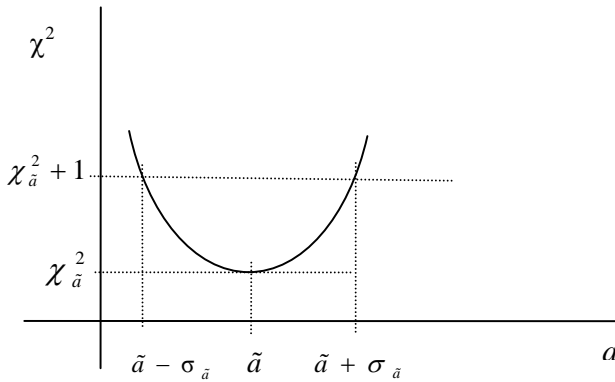
$$\chi^2(a') = \chi^2(\tilde{a}) + 1 \quad (5.41)$$

Amplituda funkce χ^2 v bodech, které se liší od hodnoty \tilde{a} právě o chybu této hodnoty $\sigma_{\tilde{a}}$ je o jedničku vyšší, než amplituda této funkce v minimu. Situace je znázorněna na obr. 5.7. Tuto vlastnost funkce χ^2 je možno využít při hledání nejistoty parametru \tilde{a} , tedy hodnoty $\sigma_{\tilde{a}}$, aniž je potřeba provádět explicitní výpočet. Sestrojíme závislost $\chi^2(a)$ a v okolí minima najdeme hodnoty parametru, pro které má funkce amplitudu o jedničku vyšší, než je amplituda v minimu. Tyto body určují nejistotu parametru.

V obecnějším případě přímky se dvěma parametry postupujeme obdobným způsobem. Funkce (5.2) má v tomto případě tvar

$$\chi^2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (5.42)$$

Obr. 5.7



V okolí minima v bodě $\tilde{a} \equiv (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1)$ aproximujeme funkci (5.42) polynomem druhého stupně

$$\begin{aligned} \chi^2(a_0, a_1) &= \chi^2(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial a_0^2} \chi^2 \right)_{\tilde{a}} (a_0 - \tilde{a}_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial a_1^2} \chi^2 \right)_{\tilde{a}} (a_1 - \tilde{a}_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial a_0 \partial a_1} \chi^2 \right)_{\tilde{a}} (a_0 - \tilde{a}_0)(a_1 - \tilde{a}_1) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_0} \chi^2 \right)_{\tilde{a}} (a_0 - \tilde{a}_0)(a_1 - \tilde{a}_1) \end{aligned}$$

Snadno vypočítáme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a_0^2} \chi^2 \right)_{\tilde{a}} = 2S', \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial a_1^2} \chi^2 \right)_{\tilde{a}} = 2XX', \quad (5.43a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a_0 \partial a_1} \chi^2 \right)_{\tilde{a}} = \left(\frac{\partial^2}{\partial a_1 \partial a_0} \chi^2 \right)_{\tilde{a}} = 2X' \quad (5.43b)$$

Po dosazení a posunutí počátku souřadnic $a'_0 = (a_0 - \tilde{a}_0)$, $a'_1 = (a_1 - \tilde{a}_1)$ máme

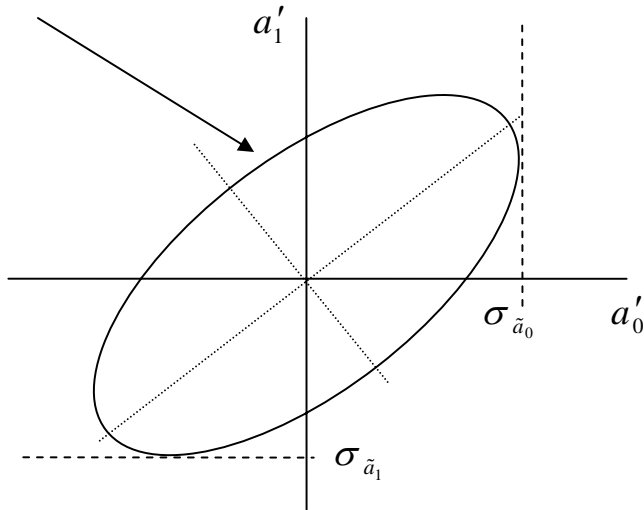
$$\chi^2(a_0, a_1) = \chi^2(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1) + S'a_0'^2 + XX'a_1'^2 + 2X'a_0'a_1' . \quad (5.44)$$

Body, ve kterých funkce (5.44) nabývá hodnot o jedničku vyšších, než je minimum v bodě $\chi^2(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1)$ tvoří v rovině (a_0', a_1') elipsu s rovnicí

$$S'a_0'^2 + XX'a_1'^2 + 2X'a_0'a_1' = 1$$

Obr. 5.8

$$\chi^2(a_0', a_1') = 1$$



Elipsa je pootočená vůči systému souřadnému a disperzi jednotlivých parametrů určují v tomto případě souřadnice tečen k elipse rovnoběžných s osami souřadného systému (obr. 5.8). Řešení pro a_1' požaduje, aby determinant kvadratické rovnice pro a_0'

$$S'a_0'^2 + 2X'a_0'a_1' + XX'a_1'^2 - 1 = 0$$

byl roven nule, tedy

$$4X'^2a_1'^2 - 4S'(XX'a_1'^2 - 1) = 0 ,$$

z čehož snadno získáme

$$a_1'^2 \equiv \sigma_{\hat{a}_1}^2 = \frac{S'}{S'XX' - \chi'^2} ,$$

což je podle očekávání výsledek totožný s (5.27). Pro disperzi parametru \tilde{a}_0 získáme tímto postupem obdobně výsledek shodný s (5.25). Výhodou tohoto postupu je ovšem možnost použití nejen pro funkci lineární, ale i pro obecnou funkci dvou parametrů. Praktický postup je v nalezení minima funkce

$$\chi^2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - f_{a_0, a_1}(x_i))^2}{\sigma_i^2} , \quad (5.47)$$

tedy hodnot parametrů \tilde{a}_0, \tilde{a}_1 , pro které je: $\chi^2(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1) = \chi_{\min}^2$. Tato úloha se řeší numericky a existuje pro ni celá řada procedur. Poté nalezneme hodnoty parametrů \hat{a}_0, \hat{a}_1 , pro něž je

$$\chi^2(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = \chi_{\min}^2 + 1 .$$

V aproximaci polynomem druhého stupně vytvoří body (\hat{a}_0, \hat{a}_1) v rovině (a_0, a_1) elipsu se středem v bodě $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1)$. Maximální hodnoty $\hat{a}_{0, \max}, \hat{a}_{1, \max}$ definují potom disperzi odhadů parametrů a_0, a_1

$$\sigma_{\tilde{a}_0}^2 = (\hat{a}_{0, \max} - \tilde{a}_0)^2, \quad \sigma_{\tilde{a}_1}^2 = (\hat{a}_{1, \max} - \tilde{a}_1)^2 . \quad (5.48)$$

Hodnoty $\hat{a}_{0, \max}, \hat{a}_{1, \max}$ najdeme opět vhodnou numerickou metodou, protože explicitní řešení, analogické výše použitému řešení pro přímkou, je v případě obecné funkce komplikované a navíc je stejně nutno minimum a hodnoty derivací (5.43) nalézt numericky. V případě tří parametrů je množinou bodů, pro které platí

$$\chi^2(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2) = \chi_{\min}^2 + 1$$

v souřadném systému s osami (a_0, a_1, a_2) rotační elipsoid. Hodnoty $\hat{a}_{0, \max}, \hat{a}_{1, \max}, \hat{a}_{2, \max}$ jsou potom obdobně definovány souřadnicemi tečných rovin rovnoběžných postupně s rovinami (a_1, a_2) , (a_0, a_2) a (a_0, a_1) .

V praxi se pro nalezení odhadů parametrů interpolačních funkcí obvykle využívají programy vytvořené v různých grafických editorech, které dokáží interpolovat funkční závislosti o mnoha parametrech, stanovit odhady hodnot parametrů včetně výpočtu příslušných nejistot. Příslušný software však vždy řeší v příslušném k -rozměrném prostoru (k je počet parametrů) úlohu naznačenou výše, tedy nalézt minimum funkce χ^2 , tedy bodu $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k)$ v k -rozměrném prostoru, ve kterém je $\chi^2(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k) = \chi_{\min}^2$, a posléze nalézt souřadnice tečných nadrovin pro stanovení disperzí odhadů.

Před užitím příslušných editorů se však doporučuje prostudovat manuály, protože v některých případech mohou být některé pojmy u různých typů softwaru chápány a interpretovány různě.

6. PŘÍLOHY

6.1 DEFINICE ZÁKLADNÍCH JEDNOTEK SI

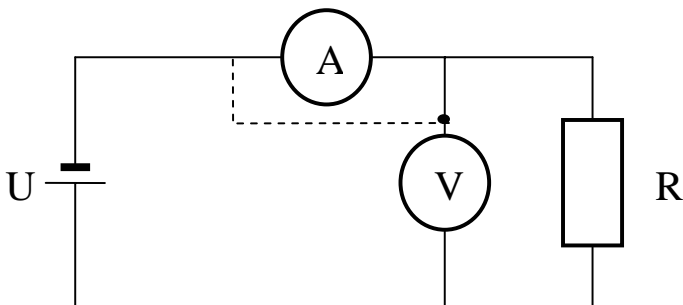
veličina	čas
jednotka	s
definice	jednotka času je definovaná frekvencí kvantového přechodu mezi hladinami hyperjemného štěpení ve spektru základního stavu $^2S_{1/2}$ atomu ^{133}Cs , $F = 4$, $m_F = 0 \rightarrow F = 3$, $m_F = 0$, tato frekvence je 9,192631770 GHz
veličina	délka
jednotka	m
definice	jeden metr je dráha, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu 1/299 792 458 sec
veličina	hmotnost
jednotka	kg
definice	etalon z platinoiridiové slitiny v Mezinárodním ústavu pro míry a váhy (reprodukovatelnost řádu $2 \cdot 10^{-8}$)
veličina	elektrický proud
jednotka	A
definice	proud, který vyvolává mezi dvěma paralelními, nekonečně dlouhými vodiči vzdálenými 1m sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na jeden metr délky
veličina	teplotní stupeň
jednotka	K
definice	237,16-tá část termodynamické teploty trojného bodu vody
veličina	molekulové množství
jednotka	mol
definice	je látkové množství, které obsahuje tolik strukturálních elementů, kolik je atomů v 0.012 kg uhlíku $^{12}\text{C}_6$

veličina	svítivost
jednotka	cd
definice	svítivost $1/600\,000\text{ m}^2$ plochy absolutně černého tělesa ve směru normály při teplotě tuhnutí platiny při normálním tlaku ($101\,325\text{ Pa}$)

6.2 MĚŘENÍ ODPORU METODOU PŘÍMOU

Předpokládejme, že je zapotřebí změřit elektrický odpor R o velikosti $R \cong 200\ \Omega$. Máme k dispozici zdroj stejnosměrného napětí $U \cong 12\text{V}$ a dále dva měřicí přístroje typu DU 20. Měření provedeme v klasickém zapojení „metodou přímou“ (viz např. [10] a obr. 6.1). Přístroje typu DU 20 je možné měřit jak stejnosměrný proud, tak i napětí. Přístroje jsou třídy přesnosti $p = 1$ (viz (2.9)) a mají přepínatelné proudové rozsahy v řadě od $100\ \mu\text{A}$ do 10 A v „trojkových“ a „desítkových“ krocích, např.: ... 10 mA , 30 mA , 100 mA , 300 mA , ... atd. Přepínání napěťových rozsahů je po obdobných krocích v rozsahu od $0,3\text{ V}$ do 300 V . Přístroje mají pro stejnosměrná měření dělení stupnice na 100 dílků pro „desítkové“ rozsahy a na 60 dílků pro rozsahy „trojkové“. V zapojení podle obr. 6.1 (varianta zapojení voltmetru vyznačená plnou čarou) volíme pro očekávané hodnoty proudový rozsah 100 mA a napěťový rozsah 30 V . Měření napětí

Obr. 6.1



okolo hodnoty $U \cong 12\text{V}$ na tomto rozsahu, tedy v dolní polovině stupnice, není sice příliš výhodné (viz odst. 2.3), ale jiný přístroj nemáme v tomto příkladu k dispozici.

Nejistota měření proudu $u_{B,I}$ na rozsahu 100 mA je podle (2.10)

$$u_{B,I} = \frac{1 \cdot 100}{\sqrt{3}} 10^{-5} \text{ A} = 5,774 \cdot 10^{-4} \text{ A} .$$

Výsledky dílčích výpočtů uvádíme na čtyři platné číslice, zatímco při konečných výsledcích pro prezentaci je nutno dodržet pravidlo o zaokrouhlování na nejvýše dvě platné číslice (viz odst. 2.3). Velikost nejmenšího dílku daného proudového rozsahu přístroje je $\delta = 10^{-3} \text{ A}$, tedy větší než nejistoty měřené hodnoty. Při měření tedy interpolujeme uvnitř nejjemnějšího dělení stupnice a výsledek uvádíme s výše uvedenou nejistotou, přičemž v tomto případě stačí zaokrouhlení na jedinou platnou číslici (se zaokrouhlovací chybou $\approx 4 \%$). Výsledek konkrétního měření proudu je

$$I = (59,3 \pm 0,6) \text{ mA}$$

Relativní nejistota měření proudu je

$$\eta_{B,I} = \frac{5,774 \cdot 10^{-4}}{59,3 \cdot 10^{-3}} = 0,9737 \cdot 10^{-2} .$$

Při měření napětí je na rozsahu 30 V velikost jediného dílku $\delta = 0,5 \text{ V}$, zatímco nejistota měření napětí podle (2.1) je

$$u_{B,U} = \frac{1 \cdot 30}{\sqrt{3}} 10^{-2} \text{ V} = 0,1732 \text{ V} .$$

Interpolací uvnitř nejjemnějšího dělení stupnice měřícího přístroje a uvážením nejistoty měření z třídy přednosti nalezneme pro konkrétně naměřenou hodnotu

$$U = (11,80 \pm 0,17) \text{ V} .$$

Zaokrouhlení nejistoty na jedinou číslici by v tomto případě přineslo zaokrouhlovací chybu $> 10 \%$. Relativní nejistota měření napětí je potom

$$\eta_{B,U} = \frac{0,1732}{11,8} = 1,468 \cdot 10^{-2} .$$

Pro nejistotu měření odporu snadno dostaneme (viz např. (4.47))

$$\eta_{B,R}^2 = \eta_{B,U}^2 + \eta_{B,I}^2 = 3,103 \cdot 10^{-4} .$$

Užitím naměřených hodnot proudu a napětí vypočítáme

$$R = 198,988 \Omega .$$

Absolutní nejistota měření odporu je potom

$$u_{B,R} = \eta_{B,R} R = 3,505 \Omega$$

Konečný výsledek měření odporu je tedy

$$R = (199,0 \pm 3,5) \Omega .$$

Pro diskuzi možné systematické chyby metody potřebujeme znát vnitřní odpory použitých přístrojů. Podle údajů výrobce je při použití přístroje DU 20 jako voltmetru na stejnosměrném rozsahu 30 V vnitřní odpor $R_{i,U} = 1,5 \text{ M}\Omega$. Nejistota této hodnoty není udána. Při použití přístroje, jako ampérmetru, je na stejnosměrném rozsahu 100 mA vnitřní odpor $R_{i,I} = 2,03 \Omega$. Tato hodnota je výsledkem lineární interpolace údajů výrobce pro oblast rozsahů (0,3–3) A. Její nejistotu odhadneme jako minimálně $u_{i,I} = 0,01 \Omega$. V zapojení podle obr. 6.1 (plná čára) je možno snadno ukázat, že systematická chyba velikosti měřeného odporu je v prvním přiblížení (poměru měřeného odporu a vnitřního odporu voltmetru)

$$\Delta R \cong -R \frac{R}{R_{i,U}} \cong -R \frac{2 \cdot 10^2}{1,5 \cdot 10^6} \cong -4,6 \cdot 10^{-2} \Omega .$$

Možná systematická chyba je tedy v tomto zapojení, díky dostatečně vysokému vnitřnímu odporu voltmetru, téměř o dva řády menší, než nejistota daná třídou přesnosti použitých přístrojů a není jí tedy nutné do výsledku měření zahrnout.

V případě druhé možné varianty zapojení naznačené v obr. 6.1 čárkovaně, je systematická chyba metody dána tím, že měříme napětí nejen na měřeném odporu ale i na ampérmetru, tedy napětí na součtu odporů $R + R_{i,I}$. Měřené hodnoty napětí a proudu se poněkud změní. Naměříme

$$U = (12,00 \pm 0,17) \text{ V} , I = (59,4 \pm 0,6) \text{ mA} .$$

Protože provádíme měření stejnými přístroji na stejných rozsazích, jsou i nejistoty měření stejné. Vydělením obou hodnot získáme výsledek

$$R = (202,0 \pm 3,5) \Omega .$$

Je tedy vidět, že i když se v konkrétním případě intervaly nejistoty obou výsledků překrývají, je zřejmé, že hodnota naměřená ve druhém případě je skutečně o velikost vnitřního odporu ampérmetru vyšší a výsledek je nutno korigovat. Po odečtení dostaneme

$$R_{kor} = (200,0 \pm 3,5) \Omega .$$

Absolutní nejistota výsledku je vypočítána podle (4.47) jako

$$u_{B,R_{kor}} = \sqrt{u_{B,R}^2 + u_{i,I}^2} = 3,505 \Omega$$

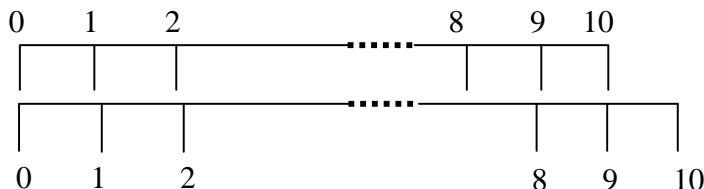
a vliv nejistoty stanovení vnitřního odporu ampérmetru je tedy zanedbatelný.

Pokud by byl měřený odpor například menší než hodnota 200Ω použitá v tomto případě, nebo byly použity přístroje s jinými hodnotami vnitřních odporů, může dojít k situaci, kdy je systematická chyba metody mnohem výraznější. Vliv vnitřního odporu měřících přístrojů se může projevit i při jiných zapojeních, a jiných metodách měření, než bylo uvedeno v našem jednoduchém příkladu. Vždy je tedy nutné provést rozbor analogický výše uvedenému příkladu.

6.3 PRINCIP NONIA

V případě mechanických stupnic je možno zpřesnit čtení uvnitř nejjemnějšího základního dělení stupnice využitím principu nonia. Tento princip se využívá například u starších typů posuvných měřítek (novější typy se již obvykle

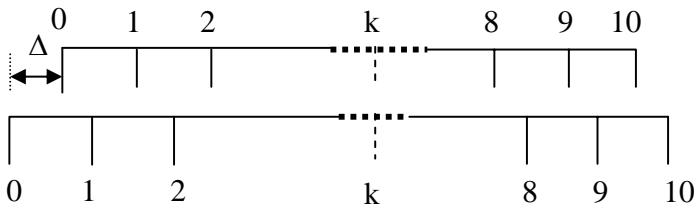
Obr. 6. 2



vyrábějí s displejem). Předpokládejme, že základní dělení stupnice má nejjemnější dílek o velikosti např. 1 mm. Devět dílků této stupnice rozdělíme pomocnou stupnicí (horní stupnice na obr. 6.2) na deset dílů. Posuneme-li nyní pomocnou stupnicí o část základního dělení Δ tak, že se její k -tý dílek ztotožní s k -tým dílkem stupnice základní (obr. 6.3), je pro bilanci příslušných délkových intervalů (velikost dílku pomocné stupnice je $9/10$ mm)

$$\Delta + k \frac{9}{10} = k \quad \rightarrow \quad \Delta = \frac{k}{10} .$$

Obr. 6. 3



U některých optických přístrojů se setkáme s variantou nonia, která umožňuje interpolovat na 0,01 úhlového stupně. V takovém případě je obvykle nejjemnější základní dělení úhlové stupnice 0,25 úhlového stupně a 24 takových dílků je rozděleno pomocnou stupnicí na 25 dílů.

6.4 ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOTI SOUČTU NÁHODNÝCH VELIČIN

Tvrzení:

Mějme nezávislé veličiny x , y , obě s normálním rozdělením. Potom jejich součet

$$z = x + y$$

je opět náhodná veličina s normálním rozdělením.

Důkaz:

V případě nezávislých veličin je podle (3.43)

$$P(x, x + dx; y, y + dy) = p_1(x) dx p_2(y) dy$$

Nechť pro jednoduchost jsou obě rozdělení s nulovou střední hodnotou

$$p_1(x) \equiv N_x(0, \sigma_1), \quad p_2(y) \equiv N_y(0, \sigma_2)$$

Potom:

$$p_1(x) p_2(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}. \quad (\text{P6.1})$$

Hustotu pravděpodobnosti $q(z)$ náhodné veličiny z dostaneme konvolucí

$$\begin{aligned}
 q(z) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-y)^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} dy = \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{(z-y)^2}{\sigma_1^2}\right]} dy
 \end{aligned}$$

Upravíme-li exponent, dostaneme

$$\begin{aligned}
 \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{(z-y)^2}{\sigma_1^2} &= \frac{\sigma_1^2 y^2 + \sigma_2^2 (z-y)^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) y^2 - 2\sigma_2^2 z y + \sigma_2^2 z^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = \\
 &= \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) y^2 - 2 \frac{z y}{\sigma_1^2} + \frac{z^2}{\sigma_1^2} = a^2 y^2 - 2b y + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{z^2}{\sigma_1^2} = \\
 &= a^2 \left(y - \frac{b}{a^2} \right)^2 + \frac{z^2}{\sigma_1^2} \left(1 - \frac{1}{a^2 \sigma_1^2} \right),
 \end{aligned}$$

kde

$$a^2 = \left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right), \quad b = \frac{z}{\sigma_1^2} \quad (\text{P6.2})$$

a dále po dosazení:

$$q(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_1^2} \left(1 - \frac{1}{a^2 \sigma_1^2} \right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{2} \left(y - \frac{b}{a^2} \right)^2} dy \quad (\text{P6.3})$$

Integrál ve vztahu (P6.3) má hodnotu $\frac{\sqrt{2\pi}}{a}$.

Dále po dosazení hodnot z (P6.2) snadno najdeme

$$q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{P6.4})$$

kde:

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 .$$

Zobecnění vztahu (P6.4) na případ více proměnných je zřejmé.

7. SEMINÁRNÍ ÚLOHY

Seminární úloha 1.1:

Těleso hmotnosti m se pohybuje rovnoměrně zrychleně, přímočaře. Počáteční rychlost je nulová. Zrychlení tělesa je a . Užitím rozměrové analýzy odvoďte vztah pro rychlost tělesa po uražení dráhy x ?

Návod: předpokládáme $v \approx a^\alpha x^\beta$).

Řešení: $v \cong \sqrt{ax}$

Seminární úloha 1.2:

Užitím rozměrové analýzy odvoďte vztah pro rychlost zvuku v plynném prostředí o hustotě ρ .

Návod:

předpokládáme $v \approx \rho, p, T$, platí stavová rovnice $\rightarrow v \approx \rho^\alpha p^\beta$).

Řešení: $v \cong \sqrt{p / \rho}$

Seminární úloha 1.3:

Užitím rozměrové analýzy odvoďte vztah pro odpor prostředí působící na automobil pohybující se rovnoměrně. Maximální plocha příčného průřezu automobilu je S , aerodynamické efekty zanedbejte.

Návod: předpokládáme $F \approx \rho^\alpha v^\beta S^\gamma$.

Řešení: $F \cong \rho S v^2$

Seminární úloha 1.4:

Užitím rozměrové analýzy stanovte vztah pro odporovou sílu působící na kuličku poloměru r pohybující se rychlostí v ve viskózní kapalině popsané dynamickou viskozitou η .

Návod: předpokládáme: $F \approx r^\alpha v^\beta \eta^\gamma$).

Řešení: $F \cong r v \eta$

Seminární úloha 1.5:

Užitím rozměrové analýzy stanovte vzorec pro dobu oběhu planety v gravitačním poli slunce.

(Předpoklad: $T \approx \kappa^\alpha R^\beta M_s^\gamma$, κ je gravitační konstanta, R je vzdálenost planety od slunce, M_s je hmotnost slunce).

Řešení: $T \approx \sqrt{R^3 / \kappa M_s}$

Seminární úloha 1.6:

Užitím rozměrové analýzy formulujte zákon elektromagnetické indukce v soustavě Gaussově.

Řešení: $U = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$

Seminární úloha 1.7:

Užitím rozměrové analýzy formulujte vzorce pro Lorentzovu sílu působící na náboj v elektrickém poli a pohybující se náboj v poli magnetickém v soustavě Gaussově.

Řešení: $F = qE$, $F = qvB/c$.

Seminární úloha 1.8:

Užitím rozměrové analýzy napište vztah pro magnetický moment proudové smyčky v soustavě Gaussově.

Řešení: $\mu = IS/c$

Seminární úloha 1.9:

Užitím rozměrové analýzy určete vztah mezi permitivitou a permeabilitou vakua a rychlostí světla ve vakuu.

Řešení: $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$

Seminární úloha 2.1:

Dokažte vztahy (2.6)–(2.8) pro maximální absolutní a relativní interval nejistoty součinu, podílu a mocniny.

Seminární úloha 2.2:

Jaká bude maximální nejistota aritmetického průměru \bar{a} veličiny a $u_{c,\bar{a}}$ při n -krát nezávisle opakovaném měření? Maximální nejistota měření veličiny a je $u_{c,a}$.

Řešení: $u_{c,\bar{a}} = u_{c,a}$

Seminární úloha 2.3:

Hustota kovového materiálu (ρ) byla stanovena vážením a změřením objemu při pokojové teplotě. Byly zjištěny následující hodnoty: $m = (8.930 \pm 0.002)$ kg , $V = (1.002 \pm 0.001) \cdot 10^{-3}$ m³. Stanovte maximální interval nejistoty měření (absolutní a relativní). Srovnáním s tabulkovými hodnotami stanovte, o jaký materiál jde.

Řešení: $\rho = (8912 \pm 11)$ kg m⁻³, $\eta_{c,\rho} = 1,2 \cdot 10^{-3}$, měď.

Seminární úloha 2.4:

Při měření průřezu drátu byla měřením „mikrometrem“ na několika místech stanovena hodnota průměru: $d = (1.26 \pm 0.02)$ mm. Stanovte maximální absolutní a relativní interval nejistoty průřezu.

Řešení: $S = (1,25 \pm 0,04)10^{-6}$ m², $\eta_{c,S} = 0,03$.

Seminární úloha 2.5:

Hustota vzorku se při studovaném efektu mění o 10 %. Měříme vzorek o výchozí hustotě 7874 kg m⁻³. Hustotu měříme Archimedovou metodou, tj. vážením ve vodě a na vzduchu při pokojové teplotě. Jaká musí být minimální přesnost měření hmotnosti (maximální relativní nejistota) aby bylo možné daný efekt spolehlivě detekovat?

Řešení: relativní nejistota vážení na vzduchu $\eta_1 = 0.6$ % ,
vážení ve vodě $\eta_2 = 0.7$ % .

Seminární úloha 2.6:

Proud v měřeném obvodu se pohybuje v rozmezí od 0 do 3 A. Potřebujeme ho změřit s přesností ± 10 mA. Stanovte jaká je minimální podmínka na třídu přesnosti ampérmetru, který potřebujeme.

Řešení: je nutné použít přístroj s třídou přesnosti 0.5 nebo lepší.

Seminární úlohy 2.7:

Napětí na měřeném prvku se pohybuje okolo 1,5 V. Je lepší použít pro měření přístroj třídy přesnosti 0,5 s rozsahem (0–5) V a nebo přístroj třídy přesnosti 1 s rozsahy (0–2) V nebo (0–10) V?

Řešení: je výhodnější použít druhý přístroj.

Seminární úloha 2.8:

Měříme stejnosměrné napětí, které se pohybuje v rozmezí (5–9) V. Je přesnější měřit digitálním voltmetrem se 4-místným displejem, rozsahem do 10 V a přesností $\pm (0,6 \% + 5)$ nebo na analogovém přístroji třídy přesnosti 0,5 s rozsahem do 10 V?

Řešení: přesnější bude v tomto případě měření analogovým voltmetrem.

Seminární úloha 3.1:

Nalezte funkci popisující rozdělení pravděpodobnosti výskytu matematického kyvadla v intervalu $(-A, A)$ v aproximaci malého rozkmitu.

Návod: uvažte souvislost mezi pohybem koncového bodu matematického kyvadla a rovnoměrným pohybem po kružnici o poloměru A .

Řešení:
$$p(x) = \frac{1}{\pi A} \left(1 - \left(\frac{x}{A} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Seminární úloha 3.2:

Dokažte, že normální rozdělení (3.16) má v bodech $x = \mu \pm \sigma$ inflexní body.

Seminární úloha 3.3:

Vypočítejte střední hodnotu náhodné veličiny, disperzi a asymetrii pro normální rozdělení.

Návod: užijte vztahy:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

Řešení: $\langle x \rangle = \mu, \quad D_k = \sigma^2, \quad \gamma = 0$

Seminární úloha 3.4:

Vypočítejte střední hodnotu a disperzi diskrétní náhodné veličiny popsané binomickým rozdělením.

Řešení: $\langle k \rangle = Np$, $D_k = Np(1-p)$

Seminární úloha 3.5:

Vypočítejte parametr asymetrie binomického rozdělení.

Řešení: $\gamma = (1-2p) / \sqrt{Np(1-p)}$

Poznámka: pro $p = 1/2$ je $\gamma = 0$ a rozdělení je symetrické kolem střední hodnoty.

Seminární úloha 3.6:

Vypočítejte střední hodnotu a disperzi diskrétní náhodné veličiny popsané Poissonovým rozdělením.

Řešení: $\langle k \rangle = \mu$, $D_k = \mu$

Seminární úloha 3.7:

Vypočítejte parametr asymetrie Poissonova rozdělení.

Řešení: $\gamma = \mu^{-1/2}$

Seminární úloha 3.8:

Vypočítejte střední hodnotu čtverce vzdálenosti $\langle x^2 \rangle$, kterou urazíme při jednorozměrném pohybu v kladném i záporném směru po N diskrétních krocích o velikosti $\pm L$, se stejnou pravděpodobností $p = 1/2$ („náhodná procházka“, „random walk“).

Návod: užití binomického rozdělení a definice střední hodnoty.

Řešení: $\langle x^2 \rangle = NL^2$

Seminární úloha 3.9:

Vypočítejte střední hodnotu a disperzi rovnoměrného, spojitého rozdělení v intervalu (a,b).

Řešení: $\langle x \rangle = (b+a)/2$, $D_x = (b-a)^2 / 12$

Seminární úloha 3.10:

Vypočítejte střední hodnotu a disperzi rovnoměrného diskretního rozdělení v intervalu $1 \leq k \leq n$.

Řešení: $\langle k \rangle = (n+1)/2$, $D_k = (n^2 - 1)/12$,

Seminární úloha 3.11:

Ukažte, že pro disperzi lineární kombinace náhodných veličin $a = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ platí

$$D_a = \sum_{i=1}^n a_i^2 D_{x_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n a_i a_j c_{x_i, x_j} .$$

Seminární úloha 3.12:

Vypočítejte medián Cauchyho rozdělení (3.15). Ukažte zároveň, že Cauchyho rozdělení nemá konečnou disperzi.

Seminární úloha 3.13:

Dokažte, že je-li rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné veličiny symetrické kolem střední hodnoty (konečné), je medián roven této střední hodnotě.

Seminární úloha 3.14:

Ukažte, že pro binomické rozdělení je pro $p = 1/2$ medián roven střední hodnotě.

Seminární úloha 4.1.:

Dokažte, že pro střední hodnotu odhadu disperze diskrétní náhodné veličiny s binomickým rozdělením pravděpodobnosti při jediném experimentu platí

$$\langle \tilde{D}_k \rangle = \frac{N-1}{N} D_k .$$

Seminární úloha 4.2.:

Dokažte tvrzení o střední hodnotě odhadu disperze náhodné veličiny získaném při n-násobném opakování experimentu v případě binomického rozdělení

$$\langle \tilde{D}_k \rangle = N \langle \tilde{p} (1 - \tilde{p}) \rangle = D_k \frac{nN-1}{nN} .$$

Seminární úloha 4.3.:

Dokažte, že při n-násobném nezávislém opakování experimentu je podle principu maximální věrohodnosti v případě Poissonova rozdělení nevychýleným odhadem parametru $\tilde{\mu}$ veličina

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i .$$

Seminární úloha 4.4:

Odvoďte vztah pro odhad disperze normálního rozdělení při n násobném nezávislém opakování experimentu

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{\mu})^2$$

Seminární úloha 5.1:

Ukažte, že odhad směrnice obecné přímky (viz (5.22))

$$\tilde{a}_1 = \frac{S'.XY' - X'.Y'}{S'.XX' - X'^2}$$

je odhadem nevychýleným.

Návod: vypočítejte $\langle \tilde{a}_1 \rangle$.

Seminární úloha 5.2:

Odvoďte vztah pro disperzi odhadu směrnice obecné přímky

$$D_{\tilde{a}_1} = \sum_{i=1}^n \frac{S'}{S'.XX' - X'^2}$$

Návod: využijte vztahů (5.22) a (3.60).

Seminární úloha 5.3:

Ukažte, že odhad parametru a_0 obecné přímky, v případě, že nejistota všech měřených bodů je stejná,

$$\tilde{a}_0 = \frac{Y.XX - X.XY}{n.XX - X^2}$$

je odhadem nevychýleným.

Návod: vypočítejte $\langle \tilde{a}_0 \rangle$.

Seminární úloha 5.4:

Ukažte, že odhad parametru a_1 obecné přímky, v případě, že nejistota všech měřených bodů je stejná,

$$\tilde{a}_1 = \frac{n \cdot XY - X \cdot Y}{n \cdot XX - X^2}$$

je odhadem nevychýleným.

Návod: vypočítejte $\langle \tilde{a}_1 \rangle$

Seminární úloha 5.5:

Vypočítejte střední hodnotu odhadu nejistoty měřené veličiny y

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)^2 \equiv \frac{R_2^2}{n}$$

pro případ měření závislosti popsané obecnou přímkou za předpokladu, že nejistota veličiny y je v celém intervalu měření stejná. (viz (5.32)).

Návod: postupujte analogicky s výpočtem pro případ přímky procházející počátkem (odst. 5.1).

8. LITERATURA

- [1] V. ŠINDELÁŘ, L. SMRŽ, Nová soustava jednotek, SPN Praha 1968
- [2] V. ŠINDELÁŘ, Z. TŮMA, Metrologie, její vývoj a současnost, Česká metrologická společnost, Praha 2002
- [3] J. KVASNICA, Jednotková struktura fyzikálních vzorců, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 36 (1991), č. 2, str. 106
- [4] J. KOŽEŠNÍK, Teorie podobnosti a modelování, SNTL Praha 1989
- [5] B. SEDLÁK, I. ŠTOLL, Elektřina a magnetismus, Academia, Praha 2002
- [6] E. HARRISON, Cosmology, Cambridge University Press, 1981, 2003
- [7] L. A. SENA, Fyzikální jednotky, Nakladatelství ČSAV, Praha 1953
- [8] D. KAMKE, K. KRÄMER, Physikalische Grundlagen der Masseinheiten, B. G. Teubner, Stuttgart 1977
- [9] J. BROŽ, V. ROSKOVEC, Základní fyzikální konstanty, SPN Praha 1987
- [10] J. BROŽ a kol., Základy fyzikálních měření, SPN Praha 1967
- [11] F. KOHLRAUSCH, Praktische Physik, B. G. Teubner, Leipzig 1951
- [12] V. FABIÁN, Základní statistické metody, Nakl. ČSAV, Praha 1963
- [13] J. ŠTĚPÁN, Teorie pravděpodobnosti, Academia Praha 1987
- [14] J. ANDĚL, Statistické metody, MatFyzPress, Praha 1998
- [15] N. L. JOHNSON, F. C. LEONE, Statistics and Experimental Design in Engineering and the Physical Sciences, John Wiley & Sons, New York 1977
- [16] J. L. STANFORD, S. B. VARDEMAN, Statistical Methods for Physical Science, in: Methods of experimental Physics Vol. 28, Academic Press, New York 1994
- [17] A. RÉNYI, Teorie pravděpodobnosti, Academia Praha, 1972
- [18] D. J. HUDSON, Lectures on Elementary Statistics and Probability, Geneva, 1964

Jiří English

**ÚVOD DO PRAKTICKÉ FYZIKY
I
ZPRACOVÁNÍ VÝSLEDKŮ MĚŘENÍ**

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 187. publikaci

Recenzovala doc. RNDr. I. Stulíková, CSc.

Z předloh připravených v systému MS-Word
upravilo a vytisklo Repro středisko UK MF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

Vydání první

Praha 2006

ISBN 80-86732-93-2