Bakalářské zkoušky (příklady otázek z matematiky)

jaro 2023

1 Lineární zobrazení (3 body)

1. V prostoru $\mathbb{R}^3$ najděte přímku p, která prochází bodem $(1,2,3)^T$ a celá se zobrazuje na jeden bod při zobrazení $f(x) = Ax$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. Dokažte či vyvraťte následující tvrzení:

   Lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je isomorfismem právě tehdy, když zobrazuje libovolnou přímku zase na přímku.

2 Vlastní čísla a vlastní vektory (3 body)

1. Definujte pojem *vlastní číslo a vlastní vektor* reálné matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
2. Zformulujte větu o spektrálním rozkladu symetrické matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
3. Najděte matici $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ takovou, aby zároveň platilo:
   - A má hodnost 1,
   - A má vlastní vektory $(2,1,1)^T$, $(1,-1,-1)^T$ a $(0,1,-1)^T$. (Všimněte si, že jsou na sebe kolmé.)

3 Ortogonální doplněk (3 body)

1. Definujte pojem *ortogonální doplněk* množiny vektorů.
2. Buď V vektorový prostor dimenze n. Dokažte, že množina vektorů $\{x_1, \dots, x_m\} \subset V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když $\dim(\{x_1, \dots, x_m\}^\perp) \le n - m$.
3. Najděte bázi ortogonálního doplňku k množině řešení soustavy
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

4 Princip inkluze a exkluze (3 body)

1. Napište znění Principu inkluze a exkluze.
2. Určete, kolik celých čísel z množiny $\{1,2,\dots,360\}$ je dělitelných alespoň jedním z čísel 4, 6 nebo 9.

5 Hyperkrychle (3 body)

Pro $d \in \mathbb{N}$ nazýváme d-dimenzionální hyperkrychlí graf s množinou vrcholů tvořenou posloupnostmi nul a jedniček délky d, kde dva vrcholy jsou spojené hranou právě tehdy, když se odpovídající posloupnosti liší v právě jedné souřadnici. Tedy $H_d = (V, E)$, kde $V = \{0,1\}^d$ a $E = \{\{x,y\} | x, y \in V \wedge \exists! i : x_i \neq y_i\}$. (Např. pro $d = 4$ je vrchol 1010 spojen hranou s vrcholy 0010, 1110, 1000 a 1011.)

1. Uveďte tvrzení o maximálním počtu hran rovinného grafu s n vrcholy.
2. Určete, pro která $d \in \mathbb{N}$ je d-dimenzionální hyperkrychle rovinný graf. Odpověď zdůvodněte.

6 Limita posloupnosti (3 body)

Nechť $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$ je posloupnost reálných čísel.

1. Definujte, co znamená, že (a_n) má limitu $+\infty$ (plus nekonečno).
2. Definujte, co znamená, že posloupnost (a_n) je shora neomezená.
3. Je pravda, že když (a_n) je shora neomezená, pak má limitu $+\infty$? Odpověď zdůvodněte.

7 Spojitost funkce (3 body)

Nechť $f : c(0,1) \to \mathbb{R}$ je reálná funkce.

1. Definujte, co znamená, že f je spojitá v bodě $\frac{1}{2}$.
2. Je funkce f definovaná na tomto intervalu jako $f(x) = \frac{2x-1}{1-2x}$ pro $x \neq \frac{1}{2}$ a jako $f(\frac{1}{2}) = -1$ spojitá v bodě $\frac{1}{2}$?
3. Nemohli bychom funkci v části 2 zadat jednodušeji jako $f(x) = \frac{2x-1}{1-2x}$ pro každé $x \in (0,1)$?

Odpovědi v částech 2 a 3 zdůvodněte.

8 Riemannův integrál (3 body)

Nechť $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, která má spojitou derivaci $f' : [0,1] \to \mathbb{R}$.

1. Vypočítejte Riemannův integrál $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Vypočítejte Riemannův integrál $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Vypočítejte Riemannův integrál $\int_0^1 x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

Své odpovědi zdůvodněte (není potřeba zdůvodňovat běžná tvrzení a věty z přednášek).

9 Skolemizace a modely (3 body)

Uvažte následující tvrzení:

– *"Každý zajíc je rychlejší než nějaká želva."*
– *"Každý je buď zajíc, nebo želva, ale ne obojí."*
– *"Existuje alespoň jeden zajíc a alespoň jedna želva."*

1. Vyjádřete tato tvrzení jako *sentence* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ve vhodně zvoleném jazyce L predikátové logiky (prvního řádu).
2. Pomocí skolemizace najděte *otevřenou* teorii S (v nějakém rozšíření L' jazyka L), která je ekvisplnitelná s teorií $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Popište nějaký *tříprvkový* model teorie S, nebo zdůvodněte, proč neexistuje.
3. Uvažme dále sentenci φ_4 v jazyce L, která formalizuje tvrzení *"Existuje zajíc, který je rychlejší než všechny želvy."* Je φ_4 v teorii T pravdivá / lživá / nezávislá? Zdůvodněte.